

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

수학

[문제 I-(1)]

확률변수 Y 는 H 의 한 점에서 직선 $y=0$, $y=1$ 까지의 거리 중 최솟값이므로 $0 \leq Y \leq 1/2$ 이다. 사건 A , 즉 선분 N 이 두 경계선 중 가까운 것과 만날 조건은 선분 반쪽의 y 축에 대한 정사영의 길이 $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 가 Y 보다 큰 것이다. 즉, 사건 A 를 확률변수 Y 로 표현하면 $0 \leq Y \leq \sqrt{3}/4$ 이고, 제시문 [가]에 의하여 $P(A) = \frac{\sqrt{3}}{4} / \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

[문제 I-(2)]

문제 (1)과 마찬가지로 $0 \leq Y \leq 1/2$ 이고 선분 반쪽의 y 축에 대한 정사영의 길이가 Y 보다 크면 선분은 경계선과 교차한다. 즉, 사건 B 는 $n=0, 1, \dots, 5$ 에 대하여 $\theta = n\pi/6$ 일 때 $0 \leq Y \leq \frac{1}{2} \sin \theta$ 인 것이다. θ 가 여섯 개의 각도를 균일한 확률로 갖는다고 했으므로 각각의 n 에 대하여 $\theta = \frac{n\pi}{6}$ 일 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고, 제시문 [가]에 의하여 $P\left(0 \leq Y \leq \frac{1}{2} \sin \theta\right) = \sin \theta$ 이다. 또한 θ 가 서로 다른 각도를 갖는 것은 배반 사건이고, θ 가 특정한 값을 갖는 것과 $Y \in \left[0, \frac{1}{2} \sin \theta\right]$ 인 것은 독립이므로 (선분 중심의 위치는 θ 에 영향을 받지 않음) 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 의하여 $P(B) = \sum_{n=0}^5 \frac{1}{6} \left(\sin \frac{n\pi}{6}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}$ 이다.

[문제 I-(3)]

선분의 중심에서 수평선까지의 거리 Y 는 여전히 $0 \leq Y \leq 1/2$ 이고, 선분 반쪽의 y 축에 대한 정사영의 길이가 Y 보다 크면 선분은 수평선 $y=0$ 또는 $y=1$ 과 교차한다. 이번에는 선분 M 의 길이가 2이므로 $0 \leq Y \leq \sin \theta$ 인 것이 주어진 θ 에 대하여 선분과 수평선이 교점을 가질 Y 의 조건이다. 전체 θ 의 범위 $[0, \pi)$ 를 $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \pi$ 와 같이 n 등분하면, $\Delta\theta = \pi/n$ 에 대하여 θ 가 $\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$ 일 확률은 $\Delta\theta/\pi$ 이다. 이 때 Y 가 $0 \leq Y \leq \sin \theta_k$ 이면 선분이 교점을 갖는 것이므로 그 확률은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(0 \leq Y \leq \sin \theta_k) \Delta\theta/\pi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P(0 \leq Y \leq \sin \theta) d\theta$ 이다. 여기서 θ 의 값에 따라 $\sin \theta \geq 1/2$ 일 수 있음에 유의하자. $0 \leq \theta \leq \pi/6$ 또는 $5\pi/6 \leq \theta \leq \pi$ 에서는 $P(0 \leq Y \leq \sin \theta) = 2 \sin \theta$ 이고, $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$ 에서는 $P(0 \leq Y \leq \sin \theta) = 1$ 이다. 따라서 확률은 $\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/6} 2 \sin \theta d\theta + \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 1 d\theta + \int_{5\pi/6}^\pi 2 \sin \theta d\theta \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} (2 - \sqrt{3})$ 이다.

[문제 I-(4)]

선분의 중심에서 수직선까지의 거리 X 는 $0 \leq X \leq 1/2$ 이고, 선분 반쪽의 x 축에 대한 정사영의 길이가 X 보다 크면 선분은 수직선 $x=0$ 또는 $x=1$ 과 교차한다. 즉 $0 \leq X \leq \frac{1}{2}|\cos\theta|$ 인 것이 주어진 θ 에 대하여 선분과 수직선이 교점을 가질 X 의 조건이다. 정사각형 G 의 네 변 중 적어도 한 변과 교차할 확률이므로 어느 변과도 교차하지 않는다는 것은 주어진 θ 에 대하여 동시에 $X > \frac{1}{2}|\cos\theta|$ 이고 $Y > \frac{1}{2}\sin\theta$ 인 것이다. 즉, X 가 전체 범위 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 중에서 $\left[\frac{1}{2}|\cos\theta|, \frac{1}{2}\right]$ 에 속하고 Y 는 전체 범위 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 중에서 $\left[\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\right]$ 에 속하는 것이다. 따라서 이 확률은

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \sin\theta)(1 - |\cos\theta|) d\theta = 1 - \frac{3}{\pi} \text{이고, 문제에서 요구하는 확률은 } \frac{3}{\pi} \text{이다.}$$

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

물리

[문제 II-1]

i) 10 cm 떨어져 있는 질량 $m = 1 \text{ kg}$ 과 질량 $M = 160 \text{ kg}$ 사이에 작용하는 중력은

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{1 \times 160 \text{kg}^2}{(0.01\text{m})^2} = 1.6 \times 10^6 G \quad \dots\dots (kg/m)^2 \text{ 단위 생략}$$

이며, 총 돌림힘 τ 는

$$\tau = 2RF = 2 \times 1m \times 1.6 \times 10^6 G = 3.2 \times 10^6 G \quad \dots\dots kg^2/m \text{ 단위 생략 (이하 단위 생략)}$$

(여기에서 2는 비틀림 진자 양쪽에서 같은 방향으로 토크가 향하고 있으므로 2배가 되었다.)

ii) $\tau = 2RF = 2RG \frac{Mm}{r^2} = \mu\theta$ 이므로 비틀림 각 θ 와 r (질량 m 과 M 사이의 거리)과의 관계는

제곱에 반비례한다. $\theta \propto 1/r^2$ 질량 m 과 M 사이의 거리가 10 cm에서 20 cm로 늘어나면 거리는 2배 증가했으므로 비틀림 각도는 4배 감소해야 한다.

두 질량이 10 cm 떨어져 있을 때 비틀림각 $\theta = 4 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 는 이었으므로 20 cm떨어졌을 때는 그 4배가 감소해야 하므로 $\theta' = 1 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 이 된다.

ii번의 다른 풀이)

두 질량이 10 cm 떨어져 있을 때 비틀림각 $\theta = 4 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 는 이었으므로 이때 비틀림 상수를 구하면

$$\tau = 3.2 \times 10^6 G = 4\mu \times 10^{-3}$$

$$\mu = \frac{32 \times 10^5 G}{4 \times 10^{-3} \text{rad}} = 8 \times 10^8 G$$

따라서 두 질량이 20 cm 떨어져 있으면

$$F' = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{1 \times 160 \text{kg}^2}{(0.02\text{m})^2} = 4 \times 10^5 G$$

이때 토크는

$$\tau = 2RF' = 2 \times 1m \times 4 \times 10^5 G = 8 \times 10^5 G = \mu\theta'$$

따라서 20 cm떨어져 있을 때 비틀림 각도 θ' 은

$$\theta' = \frac{8 \times 10^5 G}{8 \times 10^8 G} = 10^{-3} \text{rad}$$

[문제 II-2]

지표면에서의 중력가속도를 g 라고 하면 질량 m 인 물체에 작용하는 중력은

$$mg = G \frac{Mm}{R_E^2}$$

로 나타낼 수 있다. 이 물체가 지표면으로부터 h 만큼의 높이에서 작용하는 중력은, 이때의 중력가속도를 g' 이라고 할 때

$$mg' = G \frac{Mm}{(R_E + h)^2}$$

이고, 위 두 식의 비는

$$\frac{g'}{g} = \frac{R_E^2}{(R_E + h)^2} = \left(\frac{6000}{2 \times 6000} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

따라서 지상으로부터 6000 km 위의 우주에서 중력가속도는 지상에서보다 1/4로 줄어들게 된다. (4배 감소한다)

[문제 II-3]

지구를 한 바퀴 도는 공전주기는

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

로 주어진다.

달의 회전운동의 구심력은 중력이므로

$$G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

따라서 공전주기는

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{GM/r}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2}$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (\text{케플러 제 3법칙})$$

주: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{GM/r}}$ 까지만 써도 맞음

[문제 II-4]

정지위성이 되기 위해서는 위성의 공전시간이 지구의 자전시간과 같아야 하므로 정지위성의 공전주기는 $T = 24h \times 3600s/h = 86400 \text{ sec}$ 이어야 한다.

케플러 제 3법칙으로부터 $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$r = R_E + h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$\therefore h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_E$$

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

화학

문제 II

(1) $3\text{H}_2(\text{g}) + \text{N}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$, 52g의 암모니아는 $52\text{g} \div 17\text{g/몰} = 3.0$ 몰에 해당된다. 암모니아 3.0몰을 생산하기 위해서는 $30.0\text{몰} \div 2 = 1.5\text{몰}$ 의 질소가 필요하다.

1.5몰의 질소는 $1.5\text{몰} \times 22.4\text{l/몰} = 34$ 리터의 질소가 필요하다.

(2) 하버-보슈법은 화학 반응식의 계수에서 정반응에 따라 압력이 감소하는 반응임을 알 수 있다. 따라서, 압력이 높을수록 정반응이 우세하게 일어나는 반응이다.

(3) 우리 몸은 정상적인 생명활동을 통하여 다양한 산과 염기를 만들어 내거나, 섭취하지만, 혈액의 pH를 일정하게 유지한다. 혈액에서는 이산화탄소가 혈액에 녹으면서, 탄산 수소이온과 탄산의 평형으로부터 pH7.4의 완충용액으로 작용한다. 또한 호흡 조절에 의해 일정한 pH를 유지하게 된다.

수소 이온의 농도가 낮은 상황에서는 수소이온의 농도를 높이는 방향으로 화학 평형이 이동하게 되어 이산화탄소의 농도가 감소하는 방향으로 평형이 이동하며, 수소이온의 농도가 증가하는 상황에서는 이산화탄소의 발생이 증가하는 방향으로 반응이 진행된다. $\text{CO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq}) \rightleftharpoons \text{HCO}_3^-(\text{aq}) + \text{H}^+(\text{aq})$

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

생명과학

(1) 한 변의 길이가 각각 $30\mu\text{m}$ 인 정육면체 세포와 $10\mu\text{m}$ 인 정육면체로 구성된 여러 세포의 부피가 동일하다. 따라서 한 변이 $10\mu\text{m}$ 인 정육면체는 모두 27개가 존재한다.

한 변의 길이가 각각 $30\mu\text{m}$ 인 정육면체 세포의 표면적 : $6 \times 30 \times 30 = 5,400\mu\text{m}^2$

한 변의 길이가 각각 $10\mu\text{m}$ 인 정육면체 27개 세포의 표면적 : $27 \times 6 \times 10 \times 10 = 16,200\mu\text{m}^2$

한 변의 길이가 각각 $10\mu\text{m}$ 인 정육면체 27개 세포의 표면적이 3배 넓다.

이와 같이 단위부피 당 표면적의 비율이 높을 때 같은 부피의 세포가 산소 및 이산화탄소와 접할 수 있는 확률이 높아지는 것이다. 즉, 산소 및 이산화탄소와 닿을 수 있는 표면적이 넓어져 헤모글로빈과 결합할 수 있는 확률이 높아져 기체 교환을 하는데 유리하다.

(2) 세포 호흡의 결과로 생긴 이산화탄소는 혈액을 통하여 운반되어 폐를 거쳐 대기로 배출된다. 이때 모세 혈관으로 들어간 대부분의 이산화탄소는 적혈구로 들어가며, 적혈구 속의 탄산 무수화 효소의 작용에 의해 물 분자와 결합하여 탄산(H_2CO_3)을 형성하고, 다시 수소 이온(H^+)과 탄산 수소 이온(HCO_3^-)으로 해리된다. 탄산 수소 이온은 적혈구에서 혈장으로 확산되어 폐로 전달되어 이산화탄소로 방출된다. 이러한 이산화탄소 배출과정이 원활이 이루어지지 않는다면, 혈액 내 수소 이온의 농도가 증가하여 pH가 낮아져 산성화된다. 이로 인하여 생명활동에 필수적인 효소의 구조변화로 인한 활성이 감소되어 항상성 유지가 어렵게 되어 궁극적으로 사망에 이르게 된다.

(3) 이 유전자 돌연변이 형질은 우성이며 X 성염색체 상에 존재한다. 아버지가 이 유전자 돌연변이의 질환을 나타내고 어머니는 정상이므로, 아버지는 모든 딸에게 유전자 돌연변이를 갖는 X 성염색체를 물려주게 된다. 따라서 모든 딸은 유전자 돌연변이 형질을 갖게 되어 질환을 보인다. 그러나 아버지는 아들에게는 유전자 돌연변이를 갖는 X 염색체를 유전하지 않게 되어 모든 아들은 정상이다.

(4) 철수의 아버지는 헌팅턴 무도병으로 사망하였으므로, 우성 형질인 헌팅턴 무도병의 유전자 돌연변이를 갖고 있다. 철수의 어머니는 현재 정상이기 때문에 헌팅턴 무도병의 유전자 돌연변이를 갖고 있지 않다. 55세인 철수의 누나는 헌팅턴 무도병의 증상을 전혀 보이지 않으므로 헌팅턴 무도병의 유전자 돌연변이를 물려받지 않았다는 것을 알 수 있다. 따라서 철수의 아버지는 헌팅턴 무도병의 유전자 돌연변이와 정상인 대립 유전자를 모두 갖고 있음을 알 수 있다. 결국, 철수가 이 유전병을 일으키는 헌팅턴 무도병의 유전자 돌연변이 가질 확률은 $50\%(1/2)$ 이다.