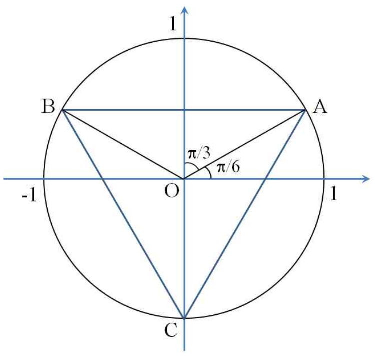
<2017학년도 경희대학교 온라인 모의논술고사>

예 시 답 안 (의학계-수학)

<논제 I> 수학

논제I-(1)



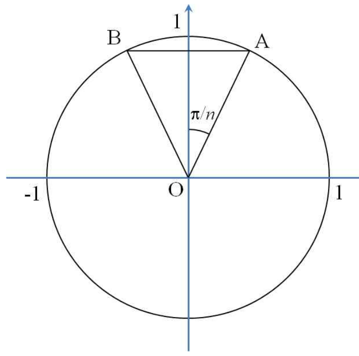
왼쪽 그림과 같이 좌표평면위에 반지름이 1인 원과 정삼각형 ABC를 생각한다. 그러면, 점 A와 점 B의 좌표는 각각 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이 된다. 삼각형 OAB와 OAC, OBC는 모두 합동이므로, 삼각형 OAB 내부의 점은 변 AB와의 거리가 다른 변과의 거리보다 작다. 그래서 삼각형 OAB 내부에서 논제에 주어진 영역의 넓이를 구하고 그 영역의 3배를 하면 원하는 영역의 넓이를 구할 수 있다. 그럼 삼각형 OAB 내부에서 주어진 영역을 구하여보자.

삼각형 OAB 내부의 점 (x,y)가 무게중심 O와의 거리보다 변 AB와의 거리가 더 크거나 같다고 가정하자. 그러면, 부등식 $\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}-y$ 를 만족한다는 것을 알 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면, 부등식 $y \le \frac{1}{4}-x^2$ 이 된다. 삼각형 OAB 내부에서 앞의 부등식을 만족하는 영역을 구하면 되므로, 포물선 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 과 선분 OA를 나타내는 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 과의 교점을 먼저 구한다. 2차방정식을 통해 계산하면, 그 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{6}\right)$이 된다.

따라서, 구하고자 하는 전체 영역의 넓이는 $2 \cdot 3 \cdot \left(\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx - \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12\sqrt{3}}$ 이다.

논제I-(2)

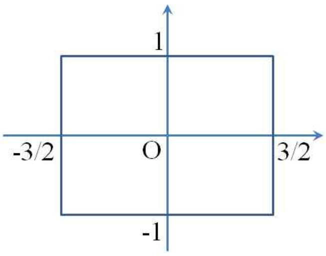
논제I－(1)에서와 같은 방법을 사용하면 아래 그림과 같은 이등변 삼각형 OAB만을 고려하면 구하고자 하는 영역의 넓이를 계산할 수 있다. 여기에서 점 A의 좌표는 $\left(\sin\frac{\pi}{n}, \cos\frac{\pi}{n}\right)$이다. 편의상 $s_n = \sin\frac{\pi}{n}$,



$c_n = \cos\frac{\pi}{n}$이라 하자. 그러면, 논제I－(1)에서와 같이, 구하고자 하는 영역의 점 (x,y)는 $x^2+y^2 \le (c_n-y)^2$을 만족한다. 이를 정리하면, $y \le \frac{c_n}{2} - \frac{1}{2c_n}x^2$이 된다. 영역의 경계인 포물선 $y=\frac{c_n}{2}-\frac{1}{2c_n}x^2$과 선분 OA를 나타내는 직선 $y=\frac{c_n}{s_n}x$ 의 교점을 구하면 $\left(\frac{c_n(1-c_n)}{s_n}, \frac{c_n^2(1-c_n)}{s_n^2}\right)$ 이 된다.

따라서, 구하고자 하는 전체 영역의 넓이는 $2n\left(\int_0^{\frac{c_n(1-c_n)}{s_n}} \frac{c_n}{2} - \frac{1}{2c_n}x^2dx - \frac{1}{2}\frac{c_n(1-c_n)}{s_n}\frac{c_n^2(1-c_n)}{s_n^2}\right)$이다. 이를 정리하면, $\frac{nc_n^2(1-c_n)^2(2+c_n)}{3s_n^3}$ 이 된다. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이고, 이를 이용하면, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있으므로, $\lim_{n\to\infty} ns_n = \pi$이고, $\lim_{n\to\infty} n^2(1-c_n) = \frac{\pi^2}{2}$이 된다. 그러므로, 극한값은 $\frac{\pi}{4}$가 된다.

논제I-(3)



세로의 길이가 2이고 가로의 길이가 3인 직사각형을 왼쪽 그림과 같이 좌표평면에 놓고 논제I−(1)과 논제I−(2)에서와 같은 방법으로, 제1사분면에서의 영역을 고려하고 4배를 하여 전체 영역의 넓이를 구하고자 한다.

직사각형 내부에서 제1사분면에 있는 점 (x,y)와 무게중심 O와의 거리가 윗변과의 거리보다 작거나 같다면 $x^2+y^2 \le (1-y)^2$을 만족하고 이를 정리하면 $y \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$이 된다. 또한 점 (x,y)와 무게중심 O와의 거리가 오른쪽 변과의 거리보다 작거나 같다면 $x^2+y^2 \le \left(\frac{3}{2}-x\right)^2$을 만족하고 이를 정리하면 $y \le \sqrt{\frac{9}{4}-3x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-4x}$이 된다. 따라서 앞선 두 부등식 모두를 만족하는 영역의 넓이를 구하면 된다. 두 영역의 경계선이 만나는 교점은 방정식 $(1-x)^2(1+x)^2 = 3(3-4x)$을 해결하면 된다. 두 영역의 경계선이 되는 포물선의 그래프를 보면 제1사분면에서는 한 점에서 만난다는 것을 알 수 있으므로, 이 방정식은 제1사분면에서 1개의 실근을 갖는다는 것을 알 수 있다. 앞의 방정식은 $(1+x)^2((1+x)^2-4x) = 3(3-4x)$로 표현되기 때문에, $(1+x)^2=3$이 되고, $x=\sqrt{3}-1$인 실근을 갖는다.

따라서 구하고자 하는 전체 영역의 넓이는 $4\left(\int_0^{\sqrt{3}-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-4x}\,dx\right)$이고, 이를 정리하면, $\frac{20\sqrt{3}-31}{3}$이다.

논제I-(4)

논제I−(3)과 같은 방법을 사용하면 문제를 해결할 수 있는데, 위의 그림에서 3/2를 t로 생각하면 된다. 따라서 부등식 $y \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$과 $y \le \sqrt{t}\sqrt{t-2x}$을 만족하는 영역의 넓이를 구하도록 하자. 포물선 $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$의 x절편은 $(1,0)$, y절편은 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$이고, 포물선 $y=\sqrt{t}\sqrt{t-2x}$의 x절편은 $\left(\frac{t}{2},0\right)$, y절편은 $(0,t)$이므로, $t \ge 2$인 경우 두 영역의 경계선은 제1사분면 내부에서 만나지 않고, $1 \le t < 2$인 경우에만 만난다.

(i) $t \ge 2$인 경우; 제1사분면에서 구하고자 하는 영역은 부등식 $y \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$을 만족하는 영역이므로, 전체 영역의 넓이는 $4\left(\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx\right)$이고, 계산하면 $\frac{4}{3}$가 된다.

(ii) $1 \le t < 2$인 경우; 방정식 $(1-x^2) = 2\sqrt{t}\sqrt{t-2x}$를 해결하면 교점을 구할 수 있는데, 그 방정식의 양변을 제곱하고 정리하면 방정식 $(1+x)^2((1+x)^2-4x) = 2t(2t-4x)$을 얻을 수 있다. 따라서 $(1+x)^2=2t$이 되고, $x=\sqrt{2t}-1$인 실근을 갖는다. 그러므로 구하고자 하는 전체 영역의 넓이는 $4\left(\int_0^{\sqrt{2t}-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_{\sqrt{2t}-1}^{\frac{t}{2}}\sqrt{t}\sqrt{t-2x}\,dx\right)$이고, 이를 정리하면, $\frac{4}{3}(t-(t-\sqrt{2t}+1)^2)$이다.

두 영역의 그림을 그려보면 알 수 있듯이, $\sqrt{2t}-1 \le x \le \frac{t}{2} < 1$의 범위에서 $\sqrt{t}\sqrt{t-2x} \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$이므로, $1 \le t < 2$인 경우 t가 크면 클수록 영역의 넓이가 커지고, 이때의 넓이는 $t=2$일 때의 넓이인 $\frac{4}{3}$보다 작다. 따라서 $t \ge 2$인 경우에 최대넓이 $\frac{4}{3}$로서 일정한 넓이를 가지므로, 주어진 영역의 최대가 되는 t의 범위는 $t \ge 2$인 모든 실수가 된다.

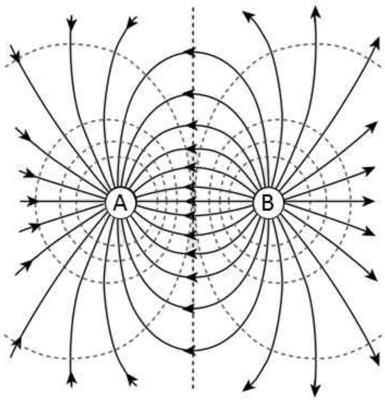
예 시 답 안 (의학계-물리)

<논제 Ⅱ> 물리

논제 II-1

(a) 그림 (가)에서 전기력과 탄성력이 평형을 이루고 있으며 탄성력의 방향은 두 입자를 서로 밀어내는 방향이기 때문에 전기력은 인력이다. 따라서 두 입자중 하나는 양전하 다른 하나는 음전하를 띄고 있음을 알 수 있다. 그림 (나)에서와 같이 전기장을 가했을 때 그 전기장에 의해 B는 전기장 방향으로 A는 전기장의 반대 방향으로 힘을 받았고 두 힘의 크기는 같다. 따라서 B가 양전하, A가 음전하이고, 두 입자의 전하량의 크기는 같음을 알 수 있다. B의 전하량을 q, A의 전하량을 $-q$라 하면, 힘의 평형의 조건으로부터 $F_{용수철} = k_{쿨롱}\dfrac{q^2}{a^2}$이고, 이 식에서 $a = 0.1\,\mathrm{m}$, $F_{용수철} = 10\,\mathrm{N/m} \times 0.01\mathrm{m} = 0.1\,\mathrm{N}$이므로 $q = \sqrt{\dfrac{F}{k}}\,a = \dfrac{1}{3}\times 10^{-6}\,\mathrm{C}$이다. 즉 B의 전하량은 $\dfrac{1}{3}\times 10^{-6}\,\mathrm{C}$(약 $3.3\times 10^{-7}\,\mathrm{C}$)이고 A의 전하량은 $-\dfrac{1}{3}\times 10^{-6}\,\mathrm{C}$(약 $-3.3\times 10^{-7}\,\mathrm{C}$)이다.

(b) 전기력선은 (+)전하에서 나와 (−)로 들어가며, 서로 교차하지 않으며, 중간에서 분리되거나 합쳐지지 않는다. 등전위선은 전위의 크기가 같은 점을 연결한 선이며 전기력선과 항상 수직이다. A는 음전하이고 B는 양전하이므로 다음과 같이 그림으로 표현할 수 있다.



A, B 주위의 전기력선과 등전위선, 화살표가 있는 실선이 전기력선, 점선이 등전위선이다.

(c) 두 전하사이의 전기력과 외부 전기장에 의한 전기력이 평형을 이룬다. 두 전하사이의 전기력은 $k_{쿨롱}\dfrac{q^2}{a^2}$이고 외부 전기장에 의한 전기력은 qE_0이므로 $qE_0 = k_{쿨롱}\dfrac{q^2}{a^2}$에서 $E_0 = k_{쿨롱}\dfrac{q}{a^2}$이고 $q = \dfrac{1}{3}\times 10^{-6}\,\mathrm{C}$, $a = 0.11\,\mathrm{m}$, $k_{쿨롱} = 9.0\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$을 대입하여 계산하면 E_0는 약 $2.5\times 10^5\,\mathrm{N/C}$이다.

논제 II-2

전기 쌍극자가 전기장 안에 놓이면 전기 쌍극자는 전기장과 같은 방향으로 정렬하려고 한다. 또한 전기장의 세기가 클수록 전기 쌍극자는 전기장의 방향으로 더 나란하게 정렬하려는 경향이 있다. 따라서 전기 쌍극자의 정렬로 인해 원래의 전기장과 반대 방향의 전기장이 생성된다. 축전기 내부에 유전체를 넣으면 이 반대 방향의 전기장에 의해 극판 사이의 전위차는 감소하게 되므로 축전기의 전기용량이 증가하게 된다. 축전기에 유전체를 넣어 줌으로서 같은 전압을 걸어주는 경우에 축전기에 더 많은 전하를 저장할 수 있으며, 따라서 더 많은 전기 에너지를 저장할 수 있다.

예 시 답 안 (의학계-화학)

<논제 Ⅱ> 화학

논제Ⅱ-(1)

옥탄이 연소되어 이산화 탄소와 물로 전환되는 반응의 균형잡힌 화학 반응식은 아래와 같다.

$C_8H_{18} + 12\frac{1}{2}O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$ 또는 $2C_8H_{18} + 25O_2 \rightarrow 16CO_2 + 18H_2O$

옥탄, 산소, 이산화탄소, 물의 분자량은 각각 114, 32, 44, 18이므로 16 g의 옥탄의 몰 수는 약 0.14 몰이고, 16 g의 산소의 몰 수는 0.5 몰이다. 옥탄 1 몰(또는 2 몰)당 12.5 몰(또는 25 몰)의 산소와 반응해야 하므로 주어진 물질량을 비교하면 산소에 비해 옥탄이 과량이므로 내연기관에서 일어나는 옥탄 연소 반응의 정도는 산소의 양에 의해 결정 된다 (또는 산소가 한계 반응물이다). 내연기관의 옥탄 연소 반응의 효율이 90% 이므로 0.5 몰의 산소 중 0.45몰의 산소만이 반응에 참여하게 된다. 산소 12.5 몰(또는 25 몰)에 의해 생성되는 이산화 탄소는 8 몰(또는 16 몰)이므로 산소 0.45몰에 의해 생성되는 이산화 탄소는 0.288 몰이 된다. 이산화 탄소의 분자량이 44 g/몰이므로 생성되는 이산화 탄소의 양은 12.672 g이다.

논제Ⅱ-(2)

0.15 M 농도의 Na_2CO_3 수용액 20 mL에 존재하는 Na 이온의 몰수는 Na_2CO_3가 해리되면 2 개의 Na 이온을 발생하므로 0.15 M × 0.02 L × 2 = 0.006 몰이고 0.15 M 농도의 NaCl 수용액 40 mL에 존재하는 Na 이온의 몰수는 0.15 M × 0.04 L = 0.006 몰이다.

따라서 전체 혼합 용액에 존재하는 Na 이온의 몰수는 0.012 몰이다.

혼합 용액의 부피는 60 mL이므로 혼합 용액에 존재하는 Na 이온의 농도는 0.012 몰 ÷ 0.06 L = 0.2 M이다.

논제Ⅱ-(3)

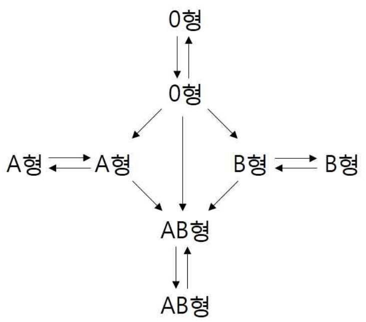
어느 물질이 다른 물질보다 산화력이 크다는 것은 다른 물질로부터 전자를 받아 환원되기가 쉽다 (또는 전자를 받아 환원되려는 경향이 크면 전자를 줄 수 있는 다른 물질을 산화시키기가 쉽다)는 의미이다.

(ㄱ)의 실험 결과로부터 아연이 전자를 잃고 이온 상태가 되어 수용액에 녹아 들어가므로 아연보다 납의 산화력이 더 큰 것을 알 수 있다. (ㄴ)의 실험 결과로부터는 납이 전자를 잃고 이온 상태로 수용액에 녹아 들어가므로 납보다 구리의 산화력이 더 큰 것을 알 수 있다. (ㄷ)의 실험 결과로부터는 은이 구리로부터 전자를 빼앗아 은 금속으로 환원되므로 구리보다 은의 산화력이 더 큰 것을 알 수 있다. 따라서, 이러한 결과를 종합하면 은이 산화력이 가장 크고, 은 > 구리 > 납 > 아연의 순서로 산화력이 작아지는 것을 알 수 있다.

예 시 답 안 (의학계-생명과학)

<논제 Ⅱ> 생명과학

논제Ⅱ-(1)



우선 혈액형이 같은 사람 사이에서는 언제든지 수혈이 가능하다. 혈액형이 다른 경우에는 수혈하는 사람의 응집원이 수혈 받는 사람의 응집소에 의해 응집되지 않아야 한다. O형은 응집원이 없으므로 누구에게나 수혈할 수 있다. 응집원 A를 가진 A형은 응집소 α가 없는 A형이나 AB형에게 수혈이 가능하다. 응집원 B를 가진 B형은 응집소 β가 없는 B형과 AB형에게 수혈이 가능하다. AB형은 응집원 A와 B가 모두 있으므로 응집소가 없는 AB형에게만 수혈이 가능하다.

논제Ⅱ-(2)

이 도시에서 I^A의 빈도가 0.3, I^B의 빈도가 0.4이므로 i의 빈도는 0.3 (=1-0.3-0.4)이다. 논제 II-1로부터 혈액형이 B형인 환자에게 수혈할 수 있는 사람은 혈액형이 B형이거나 O형이어야 한다. 유전자형이 I^BI^B이거나 I^Bi인 사람이 B형이며, 유전자형이 ii인 사람만 O형이다. 이 도시의 인구 집단이 멘델 집단이라고 가정하면 혈액형이 B형인 사람의 백분율은 (0.4×0.4+2×0.4×0.3)×100=40%이고, O형인 사람의 백분율은 (0.3×0.3)×100=9%이다. 따라서 이 도시에서 B형인 응급환자에게 수혈할 수 있는 사람(혈액형이 B형이거나 O형인 사람)의 백분율은 49%로 추정된다.

논제Ⅱ-(3)

사람을 대상으로 하는 연구에서는 인위적인 교배 실험을 할 수 없고, 가계도 분석을 통해 형질의 우열 관계를 확인할 수 있다. 가계도에서 부모에게 없던 형질이 자손 중 일부에게 나타난다면 그 부모는 이형 접합이고, 이때 갑자기 나타난 형질이 열성이다. (1) A형인 부모 사이에서 O형인 아이가 태어난 경우가 있고, (2) B형인 부모 사이에서 O형인 아이가 태어난 경우가 있는 반면, (3) O형인 부모 사이에서는 항상 O형의 아이만 태어난다면 유전자 I^A와 I^B가 i에 대해 우성이라는 결론을 도출할 수 있다.

논제Ⅱ-(4)

유전자 I^A는 적혈구 표면에 응집원 A를, I^B는 응집원 B를 발현시키는 반면, 유전자 i는 적혈구 표면에 응집원 A, B 중 어느 것도 발현시키지 않는다. 유전자형이 I^Ai거나 I^Bi인 사람은 적혈구 표면에 응집원 A나 응집원 B를 발현하게 되며, 혈액형 판정에서 응집소 α나 β를 만났을 때 항원 항체 반응에 따른 선택적 응집이 일어나서 겉으로 드러나는 표현형(혈액형)은 각각 A형과 B형이 된다. 반면에 유전자형이 ii인 사람은 적혈구 표면에 응집원 A, B가 모두 발현되지 않으므로 혈액형 판정에서 응집 반응이 나타나지 않고 O형으로 판정된다. 즉, 잡종 유전자형에서 드러나는 I^A나 I^B가 드러나지 않는 i에 대해 우성이다.