

예 시 답 안 (자연계)

<논제 I> 수학

[논제 I-1]

$g(x)$ 의 최대, 최소는 그래프의 꺾인 부분 또는 양 끝점에 있으므로 $x=0, 1, 2, 3$ 에서 $g(x)$ 의 값을 비교하면 된다. $g(0)=4, g(1)=2-k, g(2)=2-2k, g(3)=4-3k$ 이고, $0 \leq k \leq 5$ 이므로 최대는 $g(0)=4$ 이다. 따라서 $M(k)=4$. 그리고 $0 \leq k \leq 5$ 에서 $2-k \geq 2-2k$ 이므로 $g(2)=2-2k$ 와 $g(3)=4-3k$ 를 비교하면 된다. $2-2k \geq 4-3k$ 이면 $k \geq 2$ 이므로

$$m(k) = \begin{cases} 2-2k, & 0 \leq k \leq 2 \\ 4-3k, & 2 \leq k \leq 5 \end{cases}$$

따라서 $F(k) = \begin{cases} 2+2k, & 0 \leq k \leq 2 \\ 3k, & 2 \leq k \leq 5 \end{cases}$ 이고, 최대는 $k=5$ 일 때 15, 최소는 $k=0$ 일 때 2.

[논제 I-2]

아니다. 예를 들어, $f(x) = x^3$ 이면 구간 $(-1, 1)$ 의 모든 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)에 대해

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0.$$

하지만 $f'(0) = 0$.

[논제 I-3]

정답: ②

$f(-1) = f(1) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해 -1 과 1 사이에 적당한 c 가 존재해 $f'(c) = 0$ 이다. 그리고 $f''(x) \leq 0$ 이므로 $f'(x)$ 는 구간 $(-1, 1)$ 에서 증가하지 않는 함수이다. c 가 -1 과 1 사이에 있고 $f'(x)$ 가 증가하지 않으므로 $f'(1) \leq 0$ 임을 알 수 있다. 하지만 $f'(1) = 0$ 이 될 수는 없다. 만약 $f'(1) = 0$ 이라면 $f'(x)$ 가 구간 $(-1, 1)$ 에서 증가하지 않는 함수라는 사실로부터, 구간 $(-1, 1)$ 의 모든 x 에 대해 $f'(x) \geq 0$ 임을 알 수 있다. 즉, $f(x)$ 는 감소하지 않는 함수이다. 그런데 $f(-1) = f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $[-1, 1]$ 에서 상수함수가 되어야 한다. 이 구간에서 $f(x)$ 가 상수함수가 아니므로 $f'(1) < 0$ 이다.

[논제 I-4]

만약 $(-1, 1)$ 의 적당한 점 x_0 에서 $f(-1) \geq f(x_0)$ 라고 하자. 그러면 평균값 정리에 의해

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(-1)}{x_0 - (-1)}$$

인 c 가 -1 과 x_0 사이에 존재한다. $f(-1) \geq f(x_0)$ 이므로 $f'(c) \leq 0$ 이다. 한편, 모든 실수 x 에 대해 $f''(x) \leq 0$ 이므로 $f'(x)$ 는 증가하지 않는 함수이다. $f'(c) \leq 0$ 이고 $f'(x)$ 는 증가하지 않으므로 닫힌 구간 $[c, 1]$ 의 모든 x 에 대해 $f'(x) \leq 0$ 이다. 즉, 함수 $f(x)$ 는 x_0 을 포함하는 구간 $[c, 1]$ 에서 증가하지 않는 함수이다. 따라서 $f(x_0) \geq f(1)$ 이고, 이 부등식과 $f(-1) \geq f(x_0)$ 으로부터

$-1 = f(-1) \geq f(x_0) \geq f(1) = 1$ 을 얻는데, 이는 모순이다. 그러므로 구간 $(-1, 1)$ 의 모든 x 에서 $f(-1) < f(x)$ 이다.

<문제 II> 물리

(1) 물체는 중력가속도(g)에 의한 수직(y)방향의 등가속도운동을 한다.

물체 1, 2의 변위(y_1, y_2)는 시간(t) 그리고 초기속도(v_0)에 대해서 다음과 같이 주어진다.

$$\text{나중에 던진 물체 2의 변위는 } y_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\begin{aligned} \text{처음 던진 물체 1의 변위는 } y_1 &= v_0(t+2) - \frac{1}{2} g(t+2)^2 \\ &= v_0 t + 2v_0 - \frac{1}{2} g t^2 - 2gt - 2g \end{aligned}$$

충돌하는 순간 두 물체의 변위가 같으므로 $y_1 = y_2$ 이다.

$$2v_0 - 2gt - 2g = 0 \text{에서 } (2 \times 50) - (2 \times 10)t - (2 \times 10) = 0 \quad \therefore t = 4s$$

따라서 물체 1을 던진 후 두 물체가 충돌한 시간은 $t + 2s = 6s$ 이다.

(2) 포물선 운동하는 물체의 초기속도 $v_0 = 40m/s$ 이므로,

$$\text{수평면과 수직}(y)\text{방향의 초기속도 성분 } v_{0y} = v_0 \sin 60^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 34m/s \text{이다.}$$

최고높이(H)에서 수직방향의 속도 성분 v_y 는 0이므로 $v_y = v_{0y} - gt = 0$ 이다.

$$\text{따라서 } t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{34}{10} = 3.4s \text{이다.}$$

수직방향으로 중력에 의한 등가속도운동이므로 $-2gH = v_y^2 - v_{0y}^2$ 이다.

$$\text{따라서 } -2gH = 0 - v_{0y}^2, \quad H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{34^2}{2 \times 10} = 57.8m \text{이다.}$$

(3) 높이 h 의 위치에너지가 운동에너지로 전환됐으므로

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \text{로부터 } v_1 = \sqrt{2gh} \text{ 이고 주어진 바와 같이 } v_2 = 0 \text{이다.}$$

운동량 보존법칙 으로부터 $v_1 = -v'_1 + v'_2$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \text{ 도 무방}) \quad \textcircled{1}$$

탄성충돌에서

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \text{ 도 무방} \right) \quad \textcircled{2}$$

$m_1 = 2, m_2 = 1, v_2 = 0$ 이므로 ①, ②는

$$2v_1 = 2v'_1 + v'_2 \quad \textcircled{3}$$

$$2v_1^2 = 2v'^2_1 + v'^2_2 \quad \textcircled{4}$$

로 정리되고

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{로 부터 } v_1 = -v'_1 + v'_2 \quad \textcircled{5}$$

를 구하고

③, ⑤로 부터 v'_1, v'_2 를 구하면

$$v'_1 = \frac{1}{3} v_1, \quad v'_2 = \frac{4}{3} v_1 \text{ 와 같다.}$$

물체2의 최대도달높이 h' 는 다음과 같이 구한다.

$$h' = \frac{v'^2_2}{2g} = \frac{1}{2g} \times \left(\frac{4}{3} \sqrt{2gh} \right)^2 = \frac{16}{9} h$$

(4) 완전비탄성충돌에서 충돌 후 두 물체의 속도가 같으므로

$$v'_1 = v'_2 = v' \text{ 로 두면}$$

운동량 보존법칙 으로부터

$$2v_1 = 3v' \text{ 이고}$$

최대도달높이 h' 는 다음과 같이 구한다.

$$h' = \frac{v'^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{2}{3} v_1 \right)^2 = \frac{1}{2g} \times \frac{4}{9} \times 2gh = \frac{4}{9} h .$$

충돌전의 운동에너지 총합은

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 gh \quad \text{⑥}$$

이고 충돌후의 운동에너지 총합은

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = (m_1 + m_2) gh' \quad \text{⑦}$$

이므로 ⑥, ⑦의 차이는

$$2gh - 3gh' = 2gh - 3g \left(\frac{4h}{9} \right) = \frac{2}{3} gh$$

$$\left(-\frac{2}{3} gh \text{ 도 무방} \right)$$

이다.

<논제 II> 화학

[논제 II-1] 화학 1. 산과 염기 + 화학 2. 화학 평형 복합

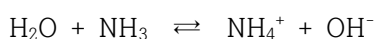
(1) (6점)

Brönsted-Lowry의 산과 염기를 정의 (3점):

Brönsted-Lowry 산: 수소이온 주게 (donor)

Brönsted-Lowry 염기: 수소이온 받게 (acceptor)

화학반응식 및 산-염기 구별 (3점):



산 염기 산 염기

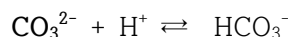
(2) (14점)

영국 런던 지역의 환경오염으로 산성비 (acid rain)가 내려 성바울 성당 외벽을 적셔 산성용액에 담긴 상태가 됨.

방해석의 주성분인 탄산칼슘 ($\text{CaCO}_3(s)$)은 중성과 염기성 용액에서는 잘 녹지 않으나 ($K_{sp}=4.5 \times 10^{-9}$), 탄산이온 (CO_3^{2-})이 공통화합종인 아래의 두 짝진 평형 (coupled equilibria) 덕분에 산성 용액에서 방해석은 녹음. (4점)



방해석 탄산이온



탄산수소이온 (화학반응식 6점)

즉, 첫 반응으로 생긴 탄산이온은 두 번째 반응에서 산성비에 의한 양성자(H^+)와 반응하여 탄산수소이온(HCO_3^-)으로 변함. 르 샤틀리에 원리에 따라 첫 반응의 생성물(CO_3^{2-})을 제거하면 그 반응은 더 오른쪽으로 치우치게 하므로 방해석이 더 많이 녹게 됨. (4점)

[논제 II-2] 화학 1. 원자의 구조와 주기성, 산과 염기 + 화학 2. 화학 평형

(1) $\text{NH}_4^+ \rightleftharpoons \text{NH}_3 + \text{H}^+$ 의 평형 상수 $K_1 = [\text{NH}_3][\text{H}^+] / [\text{NH}_4^+] = 5.7 \times 10^{-10}$ 이고, $\text{H}_3\text{O}^+ \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{H}^+$ 의 평형 상수 $K_2 = [\text{H}_2\text{O}][\text{H}^+] / [\text{H}_3\text{O}^+] = 5.0 \times 10^{-10}$ 이다. 문제에서 주어진 평형 반응의 평형 상수를 예상하려면, $[\text{NH}_4^+][\text{H}_2\text{O}] / [\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]$ 의 값을 유도해야 하므로, 암모늄 이온의 평형 반응을 역반응으로 생각하여 계산하면 문제에서 주어진 반응의 평형 상수는 $K_2/K_1 = 8.8 \times 10^{10}$ 이다. 그러므로, 평형 상태에서 반응물의 농도보다 생성물의 농도가 매우 크며, 평형이 오른쪽으로 치우친 (생성물이 많이 생성되는) 반응이 이루어진다고 예상할 수 있다. 즉, 하이드로늄 이온(H_3O^+)이 암모늄 이온(NH_4^+)보다 수소이온을 잘 내어놓고 H_2O 로 변화하려는 경향이 크다고 할 수 있다. (10점)

(2) 하이드로늄 이온(H_3O^+)이 암모늄 이온(NH_4^+)보다 수소이온을 잘 내어놓는, 보다 강한 산이라고 볼 수 있는데, 이러한 정도의 차이는 중심 원자인 산소와 질소의 전기음성도에 따라 다르다고 할 수 있다. 전기 음성도는 공유결합에서의 공유 전자쌍을 잡아당기는 능력의 세기를 말하므로, 산소와 질소의 전기 음성도를 비교해보면 산소가 더 세계 공유 전자쌍을 잡아당긴다는 것을 알 수 있다. 즉, O-H 의 결합에 존재하는 전자쌍이 N-H의 결합에서보다 더욱 산소 쪽으로 치우쳐 있으므로, H가 떨어져 나가기 쉬워지고, $\text{H}_3\text{O}^+ \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{H}^+$ 의 반응이 보다 잘 일어난다고 볼 수 있다. (10점)

<문제 II> 생명 과학

(1) 단백질의 기능은 구조와 매우 밀접한 관계가 있다. 단백질의 구조는 온도에 따라 변화되므로 단백질의 기능도 온도의 영향을 받는다. 일반적으로 23 °C 내외에서 작용하는 단백질은 고온에서 변성되어 기능이 감소되고, 고온에서 작용하는 단백질은 저온에서 구조가 변화되어 활성이 약해진다. 진정세균과 호열성 고세균이 같은 기능을 담당하는 효소를 갖고 있다면 각각의 서식 환경에서 이 효소 단백질의 입체 구조는 비슷할 것이다. 즉 이 효소 단백질의 아미노산 서열 및 이 효소 유전자의 염기 서열이 유사할 것이다. 그러나 온도가 다름에도 단백질의 구조가 비슷하게 유지되기 위해서는 각각의 온도 조건에서 단백질 구조의 안정성을 높여주는 서로 다른 전략을 가지고 있을 것이다.

한편, 그 진정세균이 고온에 적응하여 새로운 종으로 분화되었다면, 그 효소도 고온에서 구조가 비슷하게 유지될 수 있도록 새로운 전략을 갖추었을 것이다. 그 안정화 전략의 한 예로 이 효소 단백질이 고온에서 구조를 유지하는데 영향을 주는 부위의 아미노산 서열, 즉 그 부위를 암호화 하는 DNA의 염기 서열에 돌연변이가 발생하였을 수 있다. 이와 같은 유전적 변이 여부는 DNA 혼성 실험이나 자동 염기 서열 분석법 등을 통해 확인할 수 있다.

(2) 유전 공학 기술의 하나인 중합 효소 연쇄 반응(PCR)을 실시하면 효소 유전자의 돌연변이가 일어날 수 있다. DNA 혼성 실험이나 자동 염기 서열 분석법을 통해 돌연변이 유전자의 염기 서열을 분석하면 이로부터 합성될 효소 단백질의 구조와 기능을 예측할 수 있다. 이 중 고온에서 단백질의 구조와 기능이 안정적으로 유지될 수 있는 변이 유전자를 선별하여 PCR로 증폭시킨 다음 이를 세균에 도입하면 형질 전환 세균을 개발할 수 있다. 이와 같이 개발된 세균은 유용 유전자가 외부로부터 유입되었으므로 고온에서 안정적인 효소 단백질을 합성할 수 있다. 한편, 자연적으로 무작위 돌연변이가 일어난 세균들에서는 고온에 적합한 형질을 가진 개체가 자연선택 되어 살아남게 된다. 따라서 자연선택 된 세균은 효소 유전자의 변이가 반드시 일어나지 않았더라도 효소의 구조와 기능과 관계없이 고온 환경에서 생존이 가능한 형질을 가지고 있으면 서식이 가능하다.

(3) 세균에 감염되어 손상된 세포는 히스타민과 같은 화학 물질을 분비하여 모세 혈관을 확장시키고 혈관벽의 투과성을 증가시킨다. 그 결과 식균 세포들의 유입을 증가시키는 신호로 작용하여 상처 부위의 혈류량이 증가하며 열이 나고 혈장과 백혈구가 상처 부위로 이동하여 식균 작용 등의 염증 반응을 일으킨다. 또한 체온의 증가로 사람 세포뿐만 아니라 세균의 세포막의 유동성이 증가한다. 세포막의 유동성이 증가하면 사람 세포에서 만들어진 항체나 항균 물질의 수송이 빨라지고 이러한 방어 물질들이 세균으로 빠르게 유입될 수 있으므로 체온의 증가는 방어 작용을 촉진시킨다.

(4) 시상 하부 온도와 체온은 거의 비슷하다. 정상 체온인 36.6 °C에서는 피부 온도가 29 °C이든 31 °C이든 모두 체온이 시상 하부의 설정점보다 낮으므로 땀 분비에 의한 열 발산량이 증가하지 않는다. 하지만 세균 감염에 의해 체온이 36.6 °C에서 37.2 °C로 상승하고 피부 온도도 29 °C에서 31 °C로 상승하게 되면 땀 분비량이 증가하게 된다. 왜냐하면 체온이 36.6 °C이고 피부 온도가 29 °C일 때는 체온이 설정점보다 낮지만, 체온이 37.2 °C이고 피부 온도가 31 °C일 때는 체온이 설정점보다 높아 땀 분비에 의한 열 발산량이 증가하기 때문이다.

한편, 정상 체온인 36.6 °C에서는 골격근 떨림에 의한 열 생성량이 피부 온도가 29 °C이면 약 50이고 피부 온도가 31 °C이면 약 30이다. 따라서 정상 체온에서는 피부 온도가 낮을 때 골격근 떨림에 의한 열 생성량이 더 많다. 하지만 체온이 37.2 °C로 상승하면 피부 온도가 29 °C이든 31 °C이든 모두 체온이 시상 하부의 설정점보다 높으므로 피부 온도가 낮아도 골격근 떨림에 의한 열 생성량이 증가하지 않는다.

종합하면, 감염에 의해 체온과 피부 온도가 증가하게 되면 골격근의 떨림에는 변화가 거의 없으나 땀 분비량을 증가시켜 체온을 낮추려는 조절 반응이 일어나므로 추위를 느끼게 된다.