<2015학년도 경희대학교 모의논술고사>

예 시 답 안 (자연계)

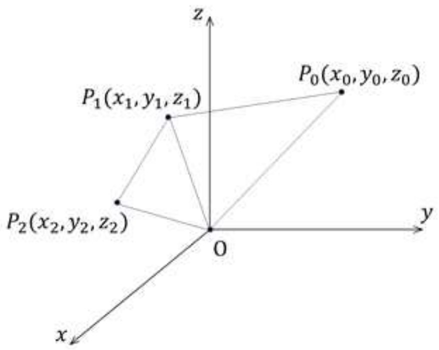
<논제 I> 수학

논제I-(1) $P_k(x_k,y_k,z_k)$ 가 주어졌을 때, $P_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1},z_{k+1})$ 은 다음 식을 만족하므로,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad z_{k+1} = rz_k \quad \left(A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right)$$

다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}-x_k \\ y_{k+1}-y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k - x_{k-1} \\ y_k - y_{k-1} \end{pmatrix}, \qquad z_k - z_{k-1} = r(z_{k-1} - z_{k-2}) \quad , \quad k \geq 2.$$



따라서

$$\overrightarrow{P_{k+1}P_k} = (r\cos\theta(x_k - x_{k-1}) - r\sin\theta(y_k - y_{k-1}),\ r\sin\theta(x_k - x_{k-1}) + r\cos\theta(y_k - y_{k-1}),\ r(z_k - z_{k-1}))$$

이고 계산하여서 정리하면,

$$\left|\overrightarrow{P_{k+1}P_k}\right| = r\left|\overrightarrow{P_kP_{k-1}}\right| \qquad (1\text{-}1)$$

이므로, l_k 는 초항이 a이고 등비가 r인 등비급수이다. 따라서 일반항은

$l_k = ar^{k-1}$ 이다.

논제I-(2)

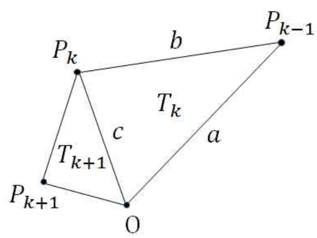
변환의 관계식으로부터,

$$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (r\cos\theta x_k - r\sin\theta y_k,\ r\sin\theta x_k - r\cos\theta y_k,\ rz_k)$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP_{k+1}}| = r|\overrightarrow{OP_k}| \qquad (2\text{-}1)$$

이다.



삼각형 T_k 의 세변을 a, b, c 라고 할 때,

$|\overline{OP_{k-1}}| = a,\ |\overline{P_{k-1}P_k}| = b,\ |\overline{OP_k}| = c$

위의 식 (2-1) 과 논제I-(1)에서의 식 (1-1) 에 의해 삼각형 T_{k+1}의 세변은 다음의 식을 만족한다.

$|\overline{OP_k}| = ra,\ |\overline{P_kP_{k+1}}| = rb,\ |\overline{OP_{k+1}}| = rc$

세변의 닮음비가 같으므로 삼각형 T_{k+1}, T_k는 닮음이다.

이것은 모든 $k \geq 1$ 에 대하여 성립하므로 $T_k(k \geq 2)$ 는 T_1 과 닮음이고, 따라서 모든 삼각형 $T_k(k \geq 1)$ 들은 닮음이다.

논제I-(3)

논제I-(2)의 결과로서 $\{|\mathrm{T_k}|\}$ 는 공비가 r^2인 등비급수이고, $\{|\overrightarrow{\mathrm{OP_k}}|\}$ 는 공비가 r인 등비급수이다. 각 수열의 초항은 다음과 같으며,

$|T_1| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_0}|\sin\alpha$ (이 때 α 는 $\overrightarrow{OP_1}$ 과 $\overrightarrow{OP_0}$ 가 이루는 각), $|\overrightarrow{OP_1}|$,

$P_0 = (1,0,1)$ 이고 $P_1 = (0,r,r)$ 이므로 $\cos\alpha$ 는

$\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \cos\alpha|\overrightarrow{OP_0}||\overrightarrow{OP_1}|$ 을 만족하므로 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $|T_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $|OP_1| = \sqrt{2}\,r$ 이고,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r}{1-r^2}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}\frac{r}{1-r}$ 이다.

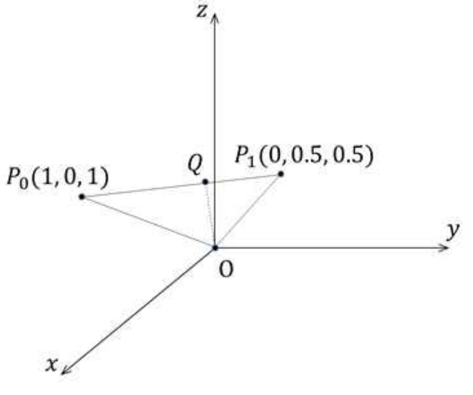
함수 $f(r) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{(\lim_{n\to\infty} b_n)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1-r}{r(1+r)}$ 에 관하여 구간 $[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}]$ 에서 최댓값을 찾기 위해서 미분을 이용하면 $f'(r) = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{(r-(1+\sqrt{2}))(r-(1-\sqrt{2}))}{(r(r+1))^2}$ 이고 주어진 구간에서 $f(x)$의 미분계수는 음수의 값을 가지므로 감소함수이다. 따라서 $r = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

논제I-(4)

선분 P_0P_1 상의 점들은 다음 식을 만족한다.

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-r}{0-r} = \frac{z-r}{1-r}$, $(r \le z \le 1)$.

$r = \frac{1}{2}$ 일 때, 점 O 에서 선분 P_0P_1 으로의 수선의 발을 내렸을 때 끝점을 Q 라고 하자. 회전체의 부피는 $\triangle QP_0O$ 를 $\overline{P_0Q}$ 를 회전축으로 회전하여 얻는 원뿔 V_1 의 부피와 $\triangle QP_1O$ 를 $\overline{P_1Q}$ 를 회전축으로 회전하여 얻는 원뿔 V_2 의 부피의 합이 된다.



수선의 발의 끝점 Q 를 $(x,y,z) = (2z-1, -z+1, z)$ 라 두고, 직선 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 와 수직임을 이용하면 $z = \frac{1}{2}$ 이고 따라서 Q 는 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이다. $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{2}}{2,}$ $|\overrightarrow{QP_0}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $|\overrightarrow{QP_1}| = 0$이므로,

$V_1 = \frac{1}{3}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}\pi$, $V_2 = 0$ 이다.

따라서 회전체의 부피 $V(= V_1 + V_2)$ 는 $\frac{\sqrt{6}}{12}\pi$ 이다.

<논제 Ⅱ> 물리

논제Ⅱ-(1)

전기자동차가 정지 상태에서 등가속도 운동을 2초 동안 하여 10m/s의 속도가 되었으므로,
가속도 (a)는 $v = v_0 + at$이므로 $10 = 0 + a \times 2(s)$이므로 가속도 $a = 5(m/s^2)$로 주어진다.
뉴턴의 제 2법칙으로부터 전기차동차를 가속할 때 필요한 힘(F)은
$F = ma = 500(kg) \times 5(m/s^2) = 2{,}500(N)$이 필요하다는 것을 알 수 있다.
등가속도운동에 대한 이동거리(s)는
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 5(m/s^2) \times (4(s))^2 = 10(m)$이므로,
전기자동차가 2초 동안 가속할 때의 10(m)의 이동거리를 갖게 된다.
최종적으로 일률(P)은 $P = \frac{W}{t} = \frac{F \bullet d}{t} = \frac{2500(N) \times 10(m)}{2(s)} = 12{,}500(W) = 12.5(KW)$이므로,
전기자동차를 가속시킬 때 모터의 일률은 12.5KW이다.

논제Ⅱ-(2)

20%의 효율을 갖는 발전기에서 얻어지는 일률(P_G)이 500W이므로,
열에너지가 포함 된 감속에서 얻어지는 총 에너지(P_B)는
$P_B = 5 \times P_G = 5 \times 500(W) = 2{,}500(W) = 2.5(KW)$로 주어진다.
전기자동차의 운동에너지는 $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 500(Kg) \times (10(m/s))^2 = 25{,}000(J)$을 얻을 수 있으며,
일률 $P_B = \frac{W}{t} = \frac{E_K}{t_B} = \frac{25{,}000(J)}{t_B} = 2{,}500(W)$에서 $t_B = 10(s)$로 제동시간이 10초임을 알 수 있다.
등가속도운동에서 가속도(a)는 $v = v_0 + at = 10(m/s) + a \times 10(s) = 0$에서 $a = -1(m/s^2)$로 주어지므로,
등가속도운도에 대한 이동거리 (s)는
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 10(m/s) \times 10(s) + \frac{1}{2} \times -1(m/s^2) \times (10(s))^2 = 50(m)$임을 알 수 있다.
즉, 전기자동차가 발전기에 의해서 감속하여 정지할 때 제동 거리(s)는 50(m)이다.

논제Ⅱ-(3)

극판사이의 거리 d를 2배, 극판의 면적 S를 3배로 변화시킨 후 10 V의 전위차를 주었을 때,
전기용량 C′은 주어진 초기 축전기의 전기용량 $C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 2 \times 10^{-6} F (= 2\mu F)$로부터,
$C' = \epsilon_0 \frac{3S}{2d} = \frac{3}{2} \times C = \frac{3}{2} \times (2 \times 10^{-6}) F = 3 \times 10^{-6} F (= 3\mu F)$이다.
따라서 축전기에 저장되는 전하량은 Q = C′V로부터,
Q = (3×10^{-6} F) × 10 V = 3×10^{-5} C이다.
따라서 축전기에 저장되는 전기 에너지는 $U = \frac{1}{2}QV$로부터,
$U = \frac{1}{2} \times (3 \times 10^{-5} C) \times 10\ V = 1.5 \times 10^{-4} J$이다.

논제Ⅱ-(4)

전극판사이가 진공상태인 축전기에 저장된 전기 에너지 $U_1 = \frac{1}{2}QV_1$이고,
절연 플라스틱을 넣은 축전기에 저장된 전기 에너지 $U_2 = \frac{1}{2}QV_2$이 된다.
축전기의 전극판의 전하량 Q가 일정할 때,
두 전기 에너지의 비(U_1/U_2) 전위차의 비(V_1/V_2)와 같게 되고 $U_1/U_2 = V_1/V_2$ = 3 kV/1 kV = 3이다.
유전체가 있을 경우의 전기용량 C_2와 유전체가 없을 때의 전기용량 C_1으로부터,
절연체의 유전상수 k = C_2/C_1으로 정의된다.
전하량 Q가 일정할 때 Q = $C_2V_2 = C_1V_1$ 그리고 $C_2/C_1 = V_1/V_2$이므로,
k = V_1/V_2 = 3 kV/1 kV = 3이다.
따라서 전기 에너지의 비(U_1/U_2)와 절연 플라스틱의 유전상수 k는 3으로 같다.

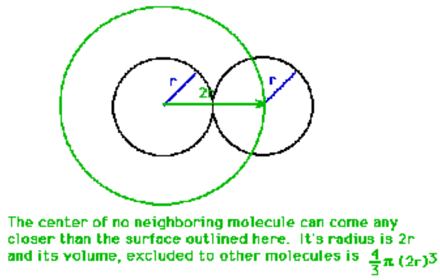
<논제 Ⅱ> 화학

논제Ⅱ-1 (1) 기체분자운동론에 따르면 기체가 용기 벽에 충돌할 때 용기 벽의 단위면적 당 받는 힘의 크기가 그 기체의 압력이다. 낮은 압력에서 그래프가 아래로 내려가는 것은 분산력 등 기체 분자 간의 상호 인력 때문이다. 운동속도가 낮기 때문에 분자들의 부피는 무시된다. 반대로 압력이 오르게 되면, 분자간의 거리가 점점 가까워지고, 이에 따라 분자 간의 반발력이 생기게 된다. 따라서, 기체의 실제 압력은 더 증가하게 된다 이 때, 용기의 부피 외에 기체 자체의 부피(배제 부피)가 중요한 요소로 작용하게 된다.

PV/RT가 1일 때, 이 기체들이 이상기체처럼 활동한다는 것은 아니다. 즉, 제시문에서처럼 분자간의 인력과 반발력이 없는 상태가 아니고, 기체의 부피도 무시할 수 없다는 것이다. 단, 이 지점에서 위와 같은 요소들이 상쇄될 뿐이다. (또는 분자간의 인력 = 분자간의 반발력 이 되는 지점)

논제Ⅱ-1 (2) 오른쪽 그림과 같이 생각해보면, 한 분자가 가질 수 있는 배제 부피는 단지 반지름에 의해서만 결정되고 이는 다음과 같다.

$$V_{배제부피} = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3 = 8(\frac{4}{3}\pi r^3)$$



즉, 한 분자의 배제부피는 실제 부피의 8배가 된다.

위의 결과를 바탕으로, 분자 1 몰이 가질 수 있는 부피는 위의 배제부피에 아보가드로 수 N_A가 곱해지고, 두 개의 분자가 상호 작용하는 것이므로 1/2가 곱해져야 한다. 따라서

$$b = \frac{1}{2}N_A(\frac{32}{3}\pi r^3) = \frac{16}{3}N_A\pi r^3$$

결과적으로 b는 반지름 r에 의해서만 결정되고 이에 비례할 것으로 예측된며, 이는 b가 기체 입자가 커짐에 따라 일반적으로 증가한다는 관찰과 일치한다.

논제Ⅱ-2 (1)

2-하이드록시피리딘 토토머화 반응의 **생성물인** N H O **의 쌍극자 모멘트가 반응물인** N OH **의 쌍극자모멘트보다 크다**. 따라서 **비극성용매인 싸이클로헥산보다 극성 용매인 물에서 생성물의 에너지가 반응물의 에너지보다 더 안정해 진다.** 따라서 극성용매인 물에서 토토머화 반응의 평형상수가 더 커진다.

논제Ⅱ-2 (2) 전자가 바닥상태에서 들뜬상태로 이동할 때 흡수하는 빛의 파장과 에너지 준위의 차이는 반비례한다. 즉 **페놀블루의 파장이 싸이클로헥산보다 수용액에서 길어지는 것은 에너지 준위의 차이가가 줄어드는 것을 의미한다.** 이것은 **들뜬 상태의 페놀블루의 쌍극자모멘트가 바닥상태에서보다 더 커서 들뜬 상태의 에너지가 비극성 용매인 싸이클로헥산보다 극성용매인 물에서 바닥상태보다 더 안정화되기 때문이다.** 하지만 머로사이아닌 염료는 **바닥상태에서 + 와 - 전하가 멀리 떨어져 있기 때문에 쌍극자모멘트가 매우 크지만 들뜬 상태의 쌍극자 모멘트는 바닥상태에 비하여 작다. 따라서 극성용매인 수용액에서 바닥상태의 에너지가 들뜬 상태에 비하여 더 안정하게 되어 바닥상태와 들뜬상태의 에너지 차이가 더 커지게 된다.** 따라서 수용액에서 머로사이아닌의 최대흡수 파장이 짧아지게 된다.

비극성용매 극성용매 N $(H_3C)_2N$ O 페놀블루

비극성용매 극성용매 H_3C N O 머로사이아닌

<논제 Ⅱ> 생명과학

논제Ⅱ-(1) 유전자 A의 유전자 이상이 생긴 잡종 1대의 이형 접합인 개체끼리 자가 수분을 통하여 얻어진 잡종 2대의 개체의 유전자형의 비가 AA : Aa : aa는 1 : 1 : 0의 비율로 나타나 유전자 이상을 갖는 동형 접합 돌연변이가 나타나지 않았다. 추가 실험을 통하여 이형 접합인 개체(Aa 유전자형)의 꽃가루를 정상적인 야생형 개체(AA 유전자형)의 난세포와 인공 수정을 시킨 후에 얻어진 잡종 개체의 유전자형의 비는 AA : Aa : aa는 1 : 0 : 0로서 모든 개체가 정상적인 유전형을 가진 것으로 나타났다. 따라서 유전자 이상을 가진 꽃가루는 수정 능력이 없음을 알 수 있다. 또한 이형 접합인 개체(Aa 유전자형)의 난세포를 정상적인 야생형 개체(AA 유전자형)의 꽃가루와 인공 수정을 시킨 후에 얻어진 식물체의 유전자형의 비는 AA : Aa : aa는 1 : 1 : 0으로 나타나 유전자 이상을 가진 난세포는 수정 능력이 정상적임을 알 수 있다. 이들 실험의 결과를 바탕으로 유전자 A의 유전자 이상을 가진 꽃가루는 정상적인 수정 능력이 없음을 알 수 있다.

논제Ⅱ-(2) 아그로박테리아에 존재하는 플라스미드에 정상 유전자를 도입하여 만든 재조합 플라스미드를 운반체로 활용하여 유전자 이상을 갖는 동형 접합 개체(rr 유전자형)의 유전자 결함을 회복하는 것이 가능하다. 우선 정상적인 개체에서 정상적인 염기 서열을 가진 야생형 유전자 R을 분리하여 아그로박테리아의 Ti 플라스미드의 T DNA 내부에 도입한다. 재조합된 플라스미드를 아그로박테리아에 도입하여 동형 접합 개체(rr 유전자형)에 옮겨줌으로써 정상으로 회복하는 것이 가능하다.

논제Ⅱ-(3) 1번 사체에서는 Y 염색체에 존재하는 아멜로제닌 유전자로부터 증폭된 DNA와 이보다 약간 작은 크기의 X 염색체에 존재하는 아멜로제닌 유전자로부터 증폭된 DNA가 모두 존재하므로, 1번의 성염색체는 XY임을 알 수 있으며 남성에 해당된다. 2번 사체에서는 작은 크기의 X 염색체에 존재하는 아멜로제닌 유전자로부터 증폭된 DNA만이 존재함으로, 2번의 성염색체는 XX임을 알 수 있으며 여성에 해당된다. 3번 사체의 경우는 실험에서 어떠한 DNA도 증폭이 되지 않았으므로 사체에서 분리된 DNA의 손상이 심하거나 중합 효소 연쇄 반응의 실험 자체가 잘못된 결과(기타 실험 오류를 가져올 수 있는 경우 등)로서 남성, 여성을 판단하는 것이 불가능하다.

논제Ⅱ-(4) 유전자 B에 대하여 정상적인 개체와 유전자 이상을 가진 개체로부터 DNA를 각각 분리한다. 다음으로 유전자 B를 구성하는 DNA의 양쪽 끝에 상보적인 염기 서열을 지니는 합성된 2개의 짧은 프라이머를 이용하여 중합 효소 연쇄 반응을 실시한다. 최종적으로 정상적인 개체와 유전자 이상을 가진 개체로부터 얻어진 증폭된 DNA의 염기서열을 분석하여 서로 비교함으로써 단일 염기 변이를 확인하는 것이 가능하다.