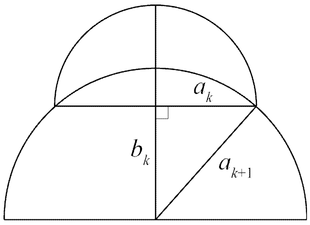
<2015학년도 경희대학교 모의논술고사>

예 시 답 안 (의학계)

<논제 I> 수학

논제Ⅰ-1

(1) 그릇의 모양이 모두 다르고 큰 것부터 작은 것 순서로 쌓고 있다고 하였으므로 $0 < r < 1$이다. 수열 $\{a_k\}$는 등비 $\frac{1}{r}$, $a_n = 1$인 등비수열 $a_n = 1, a_{n-1} = r, a_{n-2} = r^2, \cdots, a_1 = r^{n-1}$이 되어 일반항이 $a_k = r^{n-k}$가 됨을 알 수 있다. $k+1$번째 그릇 밑면에서 k번째 그릇 밑면까지의 거리를 b_k라고 하면 아래 그림과 같이 $b_k = \sqrt{a_{k+1}^2 - a_k^2} = \sqrt{r^{2(n-k-1)} - r^{2(n-k)}} = r^{n-k-1}\sqrt{1-r^2}$ 이다.



높이 h_n은

$$\begin{aligned} h_n &= a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = r^{n-1} + \sqrt{1-r^2}\sum_{k=1}^{n-1} r^{n-k-1} \\ &= r^{n-1} + \sqrt{1-r^2}\,\frac{1-r^{n-1}}{1-r} = r^{n-1} + \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\,(1-r^{n-1}) \\ &= \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + \frac{1}{r}\left(1-\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\right)r^n \end{aligned}$$

이다.

만약 n이 한없이 커진다면, $0 < r < 1$이기 때문에 r^n은 0으로 수렴한다. 그 극한값은 $\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$ 이다.

논제Ⅰ-2

a_1을 x라고 하면 b_1은 앞에서처럼 $b_1 = \sqrt{a_2^2 - a_1^2} = \sqrt{1-x^2}$ 이고 $h_2 = a_1 + b_1 = x + \sqrt{1-x^2}$ 이 되어 h_2는 $x\ (0 < x < 1)$의 미분가능 함수로 생각할 수 있다. 최댓값을 구하기 위하여 h_2를 x에 대하여 미분하고 정리하여 도함수 $h_2{}'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)}$ 를 얻는다. $h_2{}'(x)$는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 0, $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 양수, $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 음수이므로 $h(x)$는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극대이면서 최대이다. 최대 높이는 $h_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$ 이다.

논제Ⅰ-3

점화식은 $a_k = \sqrt{\frac{k}{k+1}}\, a_{k+1}$로 바꾸어 적을 수 있고, $a_n = 1$로부터 $a_{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$, $a_{n-2} = \sqrt{\frac{n-2}{n}}$, $\cdots$, $a_1 = \sqrt{\frac{1}{n}}$이 되어, 일반항이 $a_k = \sqrt{\frac{k}{n}}$임을 알 수 있다. 이때, $b_k = \sqrt{a_{k+1}^2 - a_k^2} = \sqrt{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}$으로 k에 상관없이 일정하다. 이로부터

$h_n = a_1 + b_1 + \cdots + b_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{n} + \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n}}_{n-1\text{개}} = \sqrt{n}$이다.

논제Ⅰ-4

수학적 귀납법을 이용하여 h_n의 최댓값이 $\sqrt{n}$임을 증명한다.

(i) $n=1$일 때, $h_1 = a_1 = 1$인 한 경우밖에 없으므로 $1 = \sqrt{1}$이 최댓값이다.

(ii) $n=m$일 때, $\sqrt{m}$이 h_m의 최댓값이라고 가정하자. $n = m+1$일 때, 반지름의 수열이 $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$이고 $a_{m+1} = 1$인 입체 P_{m+1}의 높이를 h_{m+1}이라고 하자. 이 그릇들 중 가장 밑 그릇을 제외한 위에서부터 m개의 그릇을 쌓아올린 입체는 반지름 $a_1, a_2, \cdots, a_m$을 가지고 있다. 이 입체는 반지름을 $\frac{a_1}{a_m}, \frac{a_2}{a_m}, \cdots, \frac{a_k}{a_m}, \cdots, \frac{a_m}{a_m}$로 가지고 높이가 h_m인 입체 P_m과 닮음비가 $a_m : 1$인 닮은 도형이다. 그래서 $h_{m+1} = a_m h_m + b_m$임을 알 수 있다. h_m의 최댓값은 (i)에서 $\sqrt{m}$으로 가정되어 있고 $b_m = \sqrt{a_{m+1}^2 - a_m^2} = \sqrt{1 - a_m^2}$이므로 $h_{m+1} = a_m h_m + b_m \le a_m \sqrt{m} + \sqrt{1 - a_m^2}$이다. 편의상 a_m을 x로 표시하고 $h(x) = x\sqrt{m} + \sqrt{1 - x^2}$이라고 하자. 함수 $h(x)$의 도함수가 $h'(x) = \sqrt{m} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m - (m+1)x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{m}\sqrt{1-x^2} + x\right)}$이므로 $x = \sqrt{\frac{m}{m+1}}$에서 최댓값 $h\left(\sqrt{\frac{m}{m+1}}\right)$을 가지고 그 값은 $h\left(\sqrt{\frac{m}{m+1}}\right) = \sqrt{\frac{m}{m+1}}\sqrt{m} + \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{m}{m+1}}\right)^2} = \sqrt{m+1}$이다. 이로부터 $h_{m+1} \le \sqrt{m+1}$임을 알 수 있다. 또한 (3)번에 주어진 수열 $a_k\ (k = 1, 2, \cdots, m+1)$에 대하여 h_{m+1}이 $\sqrt{m+1}$이 되므로 최댓값은 $\sqrt{m+1}$임을 알 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 h_n의 최댓값은 $\sqrt{n}$이다.

<논제 Ⅱ> 물리

논제Ⅱ-1

전력은 전압과 전류의 곱이므로 ($P = IV$) 전압이 클수록 작은 전류로 전력을 전달하게 된다. 저항에서 소모되는 전력은 I^2R이므로 전류의 제곱에 비례하고, 따라서 전압에 대해서는 제곱의 역수에 비례한다. 예를 들어 100MW의 전력이 총저항 10Ω인 전선을 통해 전달될 때, 전압이 200kV이면 전류는 500A 이고 전압이 500kV이면 전류는 200A 이다. 이 경우 도선에서 소모되는 전력은 각각 2.5MW (총 전력의 2.5%)와 0.4MW (총 전력의 0.4%)로 전압이 높을수록 저항에 의한 손실을 더 줄일 수 있음을 알 수 있다.

논제Ⅱ-2

교류는 변압기를 이용하여 전압을 바꿀 수 있는 장점이 있다. 변압기는 1차 코일에 공급된 교류전압에 의해 자기장의 변화가 유도되면, 철심을 통해 2차 코일에서 자기장의 변화가 교류전압을 다시 유도한다. 1차 코일에 발생하는 자기력 선속이 2차 코일에 모두 전달된다고 할 때 페러데이의 법칙에 의해 1차코일의 전압은 1차코일의 감은 횟수에 비례하고, 2차코일의 전압은 2차코일의 감은 횟수에 비례하게 된다. 따라서 220V에서 110V전압으로 낮추기 위해서는 감은 수의 비가 2:1인 변압기를 사용할 수 있다.

논제Ⅱ-3

전하량과 질량수가 보존되기 위해서는 괄호안의 입자의 전하량은 0, 질량수는 1이어야 한다.
따라서 괄호안의 입자는 중성자 일 것으로 추론할 수 있다. 이 핵반응의 질량결손에 의한 에너지의 양은 mc^2인데, 표1에서 질량과 정지에너지의 비(0.51MeV/9.11×10^{-31}kg)를 얻을 수 있다. 이를 통해 대략 계산하면 약 200MeV이다.

논제Ⅱ-4

이 핵반응에서는 1개의 중성자가 이용되고 그 결과로 3개의 중성자가 만들어진다. 이 중성자가 계속해서 다른 우라늄을 분열하게 하여 연쇄반응을 일으킨다면 막대한 에너지를 얻을 수 있다. 원자로에서는 핵연료가 적절히 핵분열을 할 수 있도록 감속재와 흡수제(제어봉)를 사용한다. 감속재는 고속 중성자를 저속 중성자로 만들어 연쇄반응을 지속적으로 일으키게 하고, 흡수제(제어봉)는 핵에 충돌하는 중성자를 흡수함으로써 연쇄 반응이 천천히 일어나도록 한다. 100MW를 24시간동안 얻는다면 총 에너지는 약 9×10^{12}J이고 반응 한번 당 200MeV 즉 3×10^{-11}J이 발생한다. 따라서 3×10^{23}번의 핵분열이 필요하고 우라늄235원자 하나의 질량은 약 4×10^{-25}kg이므로 소모되는 우라늄235의 양은 약 0.1kg* 정도이다. (* 다른 핵반응이나 효율 등을 무시한 근사임을 고려해 모범답안의 해 0.1kg 이외의 값을 얻었더라도 논리적이고 타당하게 어림한 경우 정답이다.)

<논제 Ⅱ> 화학

논제Ⅱ-1

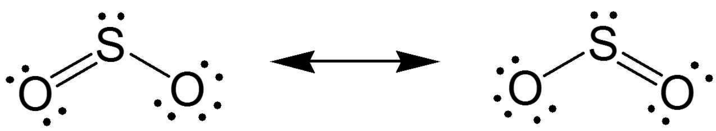
제시된 이산화황 제거 반응에서 칼슘, 산소, 황의 산화수는 각각 +2, -2, +4로 반응 전후 변화가 없다. 즉, 제시된 이산화황 제거 반응은 산화-환원 반응이 아님을 알 수 있다. 반면, 반응에 참여한 산화칼슘(CaO)은 공유결합 형성 과정에서 비공유전자쌍을 내놓고 이산화황(SO_2)은 비공유전자쌍을 받고 있으므로 루이스 산-염기 정의에 따라 산화칼슘(CaO)은 루이스 염기, 이산화황(SO_2)은 루이스 산이라 할 수 있다. 즉, 제시된 이산화황 제거 반응은 루이스의 산-염기 반응임을 알 수 있다.

논제Ⅱ-2

이산화황(SO_2)의 가능한 루이스 구조식들을 나타내면 아래와 같다.

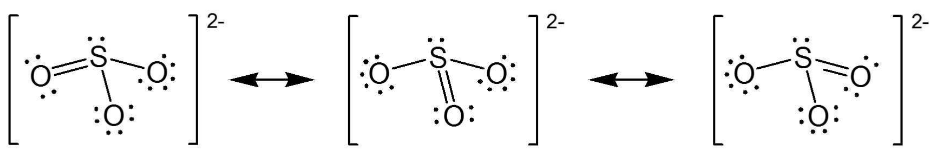
만약 이것이 이산화황(SO_2)의 구조라면 두 종류의 S와 O 사이 공유 결합들이 관측되어야 할 것이다. 하나는 결합 길이가 짧은 이중 결합이고, 다른 하나는 결합 길이가 긴 단일 결합일 것이다. 그러나 S와 O 사이의 공유 결합 길이는 단일 결합과 이중 결합의 중간 정도의 길이를 가지며 모두 동일하다는 것이 관측되었다. 따라서 보다 정확한 이산화황(SO_2)구조를 나타내기 위해서는 루이스 구조식을 일부 수정할 필요가 있다. 즉, 이산화황(SO_2)은 아래 두 가지 루이스 구조식 중 어느 것도 아니며 두 구조의 평균이라고 생각할 수 있다. 실제 이산화황(SO_2) 분자는 아래 두 가지 루이스 구조의 혼성으로 나타낼 수 있다. (이 때 공명이 일어난다고 한다.)

이산화황(SO_2):



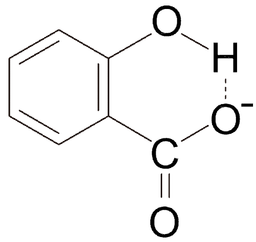
마찬가지로 아황산 이온(SO_3^{2-}) 분자도 아래 세 가지 가능한 루이스 구조의 혼성으로 나타낼 수 있다.

아황산 이온(SO_3^{2-}):



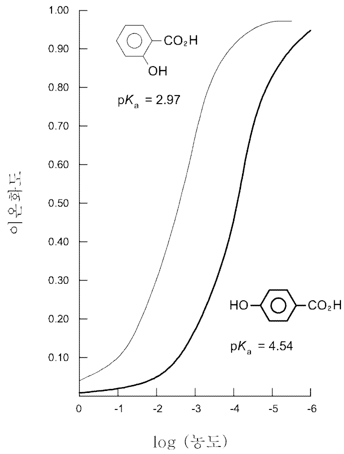
논제Ⅱ-3

산의 세기는 이온화상수(K_a) 값으로 나타낼 수 있다. 따라서 이온화상수가 가장 큰 하이드록시벤조산 이성질체는 산의 세기가 가장 큰 산이다. 산의 세기는 복잡한 요인에 의해 결정되지만, 일반적으로 산에서 수소 이온(H^+)을 떼어내는 용이함의 정도와 수소 이온이 떨어져 나와 생성된 짝염기 이온의 안정성에 의존한다. 이로 인해 산의 세기는 수소 원자(H)와 수소가 결합한 원자(A) 간의 결합(H-A) 에너지나 수소와 결합한 원소의 전기 음성도 등에 의해 결정되는 것이다. 하이드록시벤조산의 이성질체 중 생성된 짝염기 이온의 안정성을 살펴보면 다른 두 구조 이성질체와는 달리 오른쪽 그림에 나타낸 바와 같이 o-하이드록시벤조산만이 분자 구조 상 분자 내부의 수소 결합이 가능하여 생성된 짝염기 이온이 안정화됨을 알 수 있다. 이로 인해 세 가지 구조 이성질체 중 o-하이드록시벤조산의 산의 세기가 가장 크다. 따라서 이온화상수 값이 가장 큰 하이드록시벤조산 이성질체는 o-하이드록시벤조산이다.



논제Ⅱ-4

하이드록시벤조산의 이온화도(α)는 수용액에서 용해된 하이드록시벤조산의 전체 몰수에 대한 이온화된 하이드록시벤조산의 몰수의 비를 의미한다. 그런데, 하이드록시벤조산이 용해된 용액에 H_2O를 가하여 농도가 묽어지면 르샤틀리에 원리(Le Chatelier's principle)에 의해 평형이 정반응 쪽으로 이동하여 이온화된 하이드록시벤조산의 몰수가 증가하므로 하이드록시벤조산의 이온화도(α)는 농도가 묽어질수록 커진다. 한편, o-하이드록시벤조산은 p-하이드록시벤조산 보다 강한 산이기 때문에 모든 농도에 대해 o-하이드록시벤조산의 이온화도는 p-하이드록시벤조산의 이온화도 보다 크다. 따라서 이러한 경향을 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



<논제 Ⅱ> 생물

논제Ⅱ-1

사회적 지위가 낮으면 심리적으로 부정적인 사회적 평가에 대한 두려움(사회적 불안)이 생길 수 있고, 생리적으로는 만성적인 스트레스(chronic stress)로 이어진다. 이에 따라 생체의 면역기능이 억제되어 감염성 질병에 쉽게 노출되고, 비만, 당뇨, 고혈압, 암을 비롯한 만성적인 질환으로 이어질 가능성이 커지며, 정신 기능도 빨리 쇠퇴하며 사망률도 증가하게 된다. [부연설명: 불안에 중요한 뇌 영역인 대뇌편도는 대뇌변연계(limbic system)의 일부로서 자율신경계 및 내분비계 조절에 중요한 시상하부와 밀접한 관련을 맺고 있다. 생명체는 위기(스트레스)의 순간에 생존가능성을 높이기 위해 교감신경계가 흥분하고 스트레스 호르몬을 분비하는 등, 신경내분비계가 작동하는데, 이 과정은 뇌, 골격근 및 심장으로의 혈류량을 높이는 반면, 다른 기관으로의 혈류량은 줄인다. 더불어 에너지 소모는 커지고, 심장 박동은 빨라지며, 혈압은 상승하는 등, 전형적인 교감신경 흥분의 증상이 나타난다. 성공적으로 일시적인 위기를 모면한 경우라면 생명체는 교감신경 흥분 및 스트레스 호르몬의 감소와 부교감신경의 작용 등으로 생리적 반응을 정상 때의 수준으로 되돌릴 수 있다. 그러나 스트레스가 만성적으로 지속될 경우에는 부교감신경이 우세할 때 활발해지는 소화기능, 세포의 유지와 보수기능, 면역기능, 성장과 생식기능 등이 모두 억제될 뿐만 아니라, 고혈압, 비만과 당뇨, 심장 및 뇌혈관 질환 등으로 이어질 가능성이 증가한다.]

논제Ⅱ-2

③번 명제: 두 조건 'p: 폐결핵 균이 있다, q: 폐결핵에 걸린다'에 대하여 '$p \Leftarrow q$'
④번 명제: 두 조건 'p: 흡연을 한다, q: 폐암에 걸린다'에 대하여 '$(p \nRightarrow q) \wedge (q \nRightarrow p)$'

논제Ⅱ-3

(1) [마]의 논리실증주의의 입장: 옹호. 명제 ①은 경험적인 '(통계적) 사실'로서 검증이 가능한 유의미한 관찰이며, 통계적 설명에 해당한다. [부연설명: 통계적 설명은 연역적 설명과는 달리 전제('사회적 지위가 낮다')가 주어졌을 때 설명되어야 할 사건('질병과 사망')이 필연적으로 발생한다는 것을 의미하지 않고, 그것이 발생할 가능성이 높거나 혹은 아마도 거의 확실하다는 것을 보여주는 것이다.]
(2) [바]의 화자(데카르트)의 입장: 비판. 명제 ①은 연역적으로 도출되지 않았고, 사안을 파악하기 위한 분석적(환원적) 방법이 사용되지도 않았으며, 모든 대안들을 빠짐없이 꼼꼼하게 고려한 것도 아니기 때문에 확실하게 참이라고 인식할 수 없(고 진리로서 받아들일 수 없)다.

논제Ⅱ-4

통계를 활용한 역학조사를 통해 사회적 지위라는 환경적 요인이 건강에 미치는 효과를 보여준다는 점에서 명제①은 (유전과 환경 중) 환경적 요인의 중요성을 부각시키고 있다. 그러나 겉으로 드러난 표현형(높아진 유병률과 사망률)을 사회적 지위라는 단 하나의 환경적 요인만으로 설명하거나 강조하는 것은 지나친 단순화가 될 것이다. 유전적 요인(예: 질병에 대한 타고난 유전적 감수성)이 사회적 지위와 밀접하게 관련되어 있을 수도 있고, 사회적 지위와 관련된 다른 환경적 요인이 드러난 표현형에 더욱 직접적인 영향을 미치는 것일 수도 있다. 특정 표현형의 발현은 전적으로 유전적이거나 환경적인 요인에 의해 결정되는 것은 아닐 것이며, 유전자와 환경의 복잡한 상호작용의 결과로 보아야 한다.