<2015학년도 논술고사-자연계II-수학>

1. 채점 기준

1) <논제 I> (100점 만점/60점 기본 점수)

<논제 I-1> (8점 = 2+ 2 + 4 )

<2점> [핵심문구] $n$번째 단계에서 물의 양은 다음 점화식으로 표현될 수 있다.

$$V_1 = 1,\ V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4}V_n^2 + 1\ (n \geq 1)$$

<2점> [핵심문구] $n=1$ 일 때, $V_1 = 1$이므로 만족한다.

<4점> [핵심문구] $n=k$일 때, $0 < V_k < 2$가 성립한다고 가정하면,

$$V_{k+1} = -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2 \text{이고}$$

$$0 < V_k < 2 \text{이므로 } 1 < -\frac{1}{4}(V_k-2)^2 + 2 < 2 \text{이다.}$$

그러므로 $0 < V_{k+1} < 2$이고 $n = k+1$일 때 명제가 성립한다.

**(별해)** (8점 = 2+ 2 + 4 )

<2점> [핵심문구] $f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + 1$로 두면 $V_{k+1} = f(V_k)$

<2점> [핵심문구] $n=1$ 일 때, $V_1 = 1$이므로 만족한다.

<4점> [핵심문구] $n=k$일 때, $0 < V_k < 2$가 성립한다고 가정하면,

$0 < x < 2$에서 $0 < f(x) < 2$ 이므로 $0 < V_{k+1} (= f(V_k)) < 2$ 이다.

<논제 I-2> (8점 = 4 + 4)

<4점> [핵심문구] $V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{4}V_n^2 + 1$

<4점> [핵심문구] [논제I-1]로부터 모든 자연수 $n$에 대하여 $0 < V_n < 2$이므로 모든 $n$에 대하여 $-\frac{1}{4}V_n^2 + 1 > 0$이므로 $V_{n+1} - V_n > 0$이다.

**(별해)** (8점 = 4 + 4)

<4점> [핵심문구] $f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + 1$로 두면 $V_{k+1} = f(V_k)$ 이고

$f(x)$는 구간 $0 < x < 2$에서 증가함수

<4점> [핵심문구] $V_2 > V_1$ 이고, $V_{k+1} > V_k$ 라 가정하면 $f(V_{k+1}) > f(V_k)$ 이므로

$V_{k+2} > V_{k+1}$ (수학적 귀납법을 사용한 증명도 허용)

<논제 I-3> (10점 = 2 + 4+ 2+ 2)

<2점> [핵심문구] $V_{n+1}=V_n-\frac{1}{4}V_n^2+1$ 을 변형하여 $2-V_{n+1}=\frac{1}{4}(2-V_n)^2$ 을 얻는다.

<4점> [핵심문구] $a_n=2-V_n$ 이라고 두면 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n^2$ 이고 [논제I-1]의 결과로부터 모든 $n\geq 1$에 관하여 $a_n>0$이다. 따라서 등식 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n^2$ 의 양변에 $\log_2$ 를 취하고 $b_n=\log_2 a_n$ 으로 두면 $b_{n+1}-2=2(b_n-2)$ 이므로 $b_n-2$ 은 공비가 2이고 초항이 $b_1-2=-2$ 인 등비수열이다. 즉, $b_n-2=2^{n-1}(-2)=-2^n$이다.

<2점> [핵심문구] $V_n=2-a_n=2-2^{2-2^n}$

<2점> [핵심문구] $\lim_{n\to\infty}V_n=2$

(별해) (10점 = 2 + 3+ 3+ 2)

<2점> [핵심문구] $V_{n+1}=V_n-\frac{1}{4}V_n^2+1$ 을 변형하여 $2-V_{n+1}=\frac{1}{4}(2-V_n)^2$ 을 얻는다.

<3점> [핵심문구] $a_n=2-V_n$ 으로 두고 규칙을 살펴보면 $a_n=2^{-2-2^2-2^3\cdots-2^{n-1}}$ 이다.

<3점> [핵심문구] $2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$ 이므로, $V_n=2-a_n=2-2^{2-2^n}$이다.

<2점> [핵심문구] $\lim_{n\to\infty}V_n=2$ 이다.

<논제 I-4> (14점 = 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 )

<2점> [핵심문구] $\tan\theta=\frac{2r}{h}$

<2점> [핵심문구] $\frac{1}{2}\times$원기둥의 부피$=2$ 혹은 $\frac{1}{2}\pi r^2 h=2$

<2점> [핵심문구] 용기의 겉넓이는 $f=\pi r^2+\pi rh=\pi r^2+\frac{4}{r}$

<4점> [핵심문구] $f'(r)=\frac{2\pi}{r^2}\left(r^3-\frac{2}{\pi}\right)$이고 $f(r)$은 $r=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ 에서 최솟값을 가진다.

이때, $h=\frac{4}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ 이고, $\tan\theta=\frac{2r}{h}=1$이다.

<2점> [핵심문구] 용기를 물로 가득 채웠을 때 용기의 밑면은 물의 표면의 정사영이 되므로, 두 넓이는 $S_0=S\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=S\sin\theta$ 를 만족한다.

<2점> [핵심문구] $\frac{S}{S_0}=\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{2}$ 이고 두 넓이의 비와 가장 가까운 자연수는 1