# 2015학년도 논술고사 예시답안(자연계II)

## 논제 I-수학

[논제 I-1]

$n$번째 단계에서 물의 양은 다음 점화식으로 표현될 수 있다.

$$V_1 = 1,\ V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4}V_n^2 + 1\ (n \ge 1)$$

명제 $0 < V_n < 2$가 모든 $n$에 대하여 성립함을 보이자.

$n=1$일 때, $V_1 = 1$이므로 만족한다.

$n=k$일 때, $0 < V_k < 2$가 성립한다고 가정하면,

$V_{k+1} = V_k - \frac{1}{4}V_k^2 + 1$에서 $V_{k+1} = -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2$이고

$0 < V_k < 2$이므로 $1 < -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2 < 2$이다.

그러므로 $0 < V_{k+1} < 2$이고 $n = k+1$일 때 명제가 성립한다.

따라서 모든 자연수 $n$에 대하여 $0 < V_n < 2$이 성립한다.

[논제 I-2]

임의의 자연수 $n$에 대하여 $V_{n+1} > V_n$임을 보이자.

$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{4}V_n^2 + 1$이고 [논제 I-1]의 결과로부터

모든 자연수 $n$에 대하여 $0 < V_n < 2$이다.

이를 이용하면 모든 $n$에 대하여 $-\frac{1}{4}V_n^2 + 1 > 0$이므로 $V_{n+1} - V_n > 0$이다.

따라서 용기에 담긴 물의 양 $V_n$은 $n$이 커짐에 따라 증가한다.

[논제 I-3]

점화식 $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4}V_n^2 + 1$을 $2 - V_{n+1} = \frac{1}{4}(2 - V_n)^2$로 변형한다.

여기서 $a_n = 2 - V_n$이라고 두면 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2$이다.

[논제I-1]의 결과로부터 모든 $n \ge 1$에 관하여 $a_n > 0$이다.

따라서 등식 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n^{\,2}$의 양변에 $\log_2$를 취하면, $\log_2 a_{n+1}=-2+2\log_2 a_n$이다.

이때, $b_n=\log_2 a_n$으로 두면 $b_{n+1}-2=2(b_n-2)$이므로

수열 $\{b_n-2\}$는 공비가 2이고 초항이 $b_1-2=-2$인 등비수열이다.

즉, $b_n-2=(-2)\cdot 2^{n-1}=-2^n$이고 $a_n=2^{b_n}=2^{2-2^n}$이다.

따라서 $V_n=2-a_n=2-2^{2-2^n}$이고 $\lim_{n\to\infty}V_n=2$이다.

[논제 I-4]

원기둥의 밑면의 반지름을 $r$, 원기둥의 높이를 $h$라 하자.

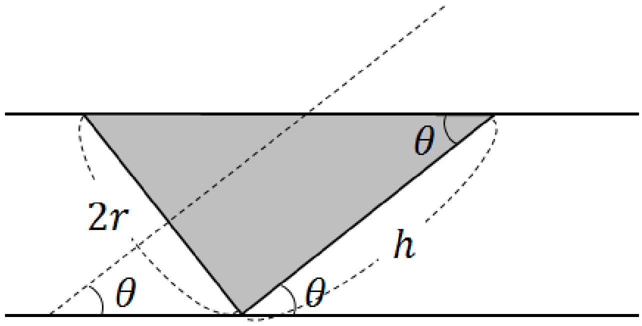
물이 넘치지 않게 최소의 겉넓이를 가지도록 용기를 만들려면,

아래 두 조건을 만족하는

$\theta$, $h$, $r$ 중 용기의 겉넓이가 최소가 되는 값을 찾으면 된다.

조건 1. $\tan\theta=\frac{2r}{h}$

조건 2. $\frac{1}{2}\times$원기둥의 부피$=2$




$\frac{1}{2}\pi r^2h=2$, $\tan\theta=\frac{2r}{h}$, 그리고 용기의 겉넓이는 $f=\pi r^2+\pi rh$ 이다.

$\frac{1}{2}\pi r^2h=2$를 이용하면, $h=\frac{4}{\pi r^2}$이므로 $f=\pi r^2+\frac{4}{r}$이다.

$f$는 $r$에 관한 함수이고 $r>0$에서 미분가능하므로, $f'(r)=\frac{2\pi}{r^2}\left(r^3-\frac{2}{\pi}\right)$ 이다.

미분의 결과로서 $r>0$인 구간에서 $f(r)$은 $r=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$에서 최댓값을 가진다.

이때, $h=\frac{4}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$이고, $\tan\theta=\frac{2r}{h}=1$이다.

용기를 물로 가득 채웠을 때 용기의 밑면은 물의 표면의 정사영이 되므로,

두 넓이는 $S_0=S\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=S\sin\theta$를 만족한다.

따라서 $\frac{S}{S_0}=\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{2}$이고 두 넓이의 비와 가장 가까운 자연수는 1이다.