<2015학년도 논술고사-자연계I-수학>

1. 채점 기준

1) <논제 I> (100점 만점/60점 기본 점수)

<논제 I-1> (6점 = 2 + 2 + 2)

<2점> [핵심문구] 주어진 조건을 만족하는 삼각형은
$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(1,4,5)$, $(1,4,6)$의 7가지 종류
(※ 대칭을 이용하여 한 점을 고정시키고 삼각형을 찾는 대신 만들 수 있는 모든 삼각형을 고려하는 경우도 인정)

<2점> [핵심문구] 이 중에서
$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,6)$, $(1,4,5)$, $(1,4,6)$는 **합동인 직각삼각형**
$(1,3,5)$는 **정삼각형**
(※ 찾은 삼각형을 직각삼각형과 정삼각형으로 분류하면 인정)

<2점> [핵심문구] 확률을 계산하여 확률분포표를 제시하고, 평균을 정확하게 계산

X	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

평균 $\frac{6}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{28}$

<논제 I-2> (10점 = 4 + 4 + 2)

<4점> [핵심문구] 주어진 조건을 만족하는 삼각형은
$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$의 7가지 종류

이 중에서
$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$는 **합동인 직각삼각형**
$(1,3,4)$, $(1,3,6)$도 또 다른 서로 **합동인 직각삼각형**
$(1,3,5)$는 **이등변삼각형**
(※ 찾은 삼각형을 직각삼각형 2개와 이등변삼각형 1개로 분류하면 인정)

<4점> [핵심문구] 각각의 넓이와 그 확률을 정확하게 서술

$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\theta \cdot 2 = \sin\theta$, 확률 $\frac{4}{7}$

$(1,3,4)$, $(1,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta \cdot 2 = \sin 2\theta$, 확률 $\frac{2}{7}$

$(1,3,5)$: 넓이 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta = \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$, 확률 $\frac{1}{7}$

(※ 빠뜨린 경우가 있으면 감점)

<2점> [핵심문구] 평균을 정확하게 계산

평균 $\frac{4}{7}\sin\theta + \frac{2}{7}\sin 2\theta + \frac{1}{7}\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \frac{5}{14}(2\sin\theta + \sin 2\theta)$

또는 $\frac{4}{7}\sin\theta + \frac{2}{7}\sin 2\theta + \frac{1}{7}\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \frac{5}{7}\sin\theta(1+\cos\theta)$

<논제 I-3> (10점 = 5 + 5)

<5점> [핵심문구] 확률변수 X의 평균 $f(\theta) = \frac{5}{14}(2\sin\theta + \sin 2\theta)$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$의 극값 계산

$f'(\theta) = \frac{5}{7}(\cos\theta + \cos 2\theta) = \frac{5}{7}(\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1) = \frac{5}{7}(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$의 범위에서 $f'(\theta) = 0$이 되는 경우는 $\cos\theta = \frac{1}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{3}$

<5점> [핵심문구] $f''(\theta) = \frac{5}{7}(-\sin\theta - 2\sin 2\theta) < 0$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서 극대

$f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{28}$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 최대

(※ 아래와 같이 이계도함수를 이용하는 대신 일계도함수의 부호를 이용하여도 인정

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$일 때 $f'(\theta) > 0$이고, $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때 $f'(\theta) < 0$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 최대)

(※ 미분을 이용하여 최대를 구하는 과정을 합리적으로 서술하였으나 [논제 I-2]에서 구한 평균이 틀려서 답이 틀리게 되는 경우에는 부분점수 인정)

<논제 I-4> (14점 = 4 + 5 + 5)

<4점> [핵심문구] 주어진 조건을 만족하는 삼각형은

$(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,6)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$의 <u>10가지</u> 종류

이 중 $(1,2,3)$는 이등변삼각형, $(1,3,5)$는 이등변삼각형
$(1,2,4)$, $(2,3,6)$는 합동, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$는 합동
$(1,2,6)$, $(2,3,4)$는 합동, $(1,3,4)$, $(1,3,6)$는 직각삼각형

<5점> [핵심문구] 각각의 넓이와 그 확률을 정확하게 서술

$(1,2,3)$: **넓이** $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot(a-p)=q(a-p)$, **확률** $\frac{1}{10}$

$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$: **넓이** $2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot q=aq$, **확률** $\frac{4}{10}$

$(1,2,6)$, $(2,3,4)$: **넓이** $\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot q=pq$, **확률** $\frac{2}{10}$

$(1,3,4)$, $(1,3,6)$: **넓이** $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot 2p=2pq$, **확률** $\frac{2}{10}$

$(1,3,5)$: **넓이** $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot(a+p)=q(a+p)$, **확률** $\frac{1}{10}$

(※ 빠뜨린 경우가 있으면 적절하게 감점)

<5점> [핵심문구] 평균을 정확하게 계산

평균 $\frac{1}{10}(q(a-p)+4aq+2pq+2(2pq)+q(a+p)) = \frac{1}{10}(6aq+6pq)=\frac{3}{5}(a+p)q$

[핵심문구] 평균의 최대를 정확하게 계산

$q=\frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$이므로 **평균** $\frac{3}{5}(a+p)q=\frac{3}{5}(a+p)\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$

$g(p)=(a+p)\sqrt{a^2-p^2}$ 이라고 정의하면

$$g'(p)=\sqrt{a^2-p^2}+(a+p)\frac{-2p}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-p^2}}=\frac{-(2p-a)(p+a)}{\sqrt{a^2-p^2}}$$

$0<p<a$이고 $0<a<1$이므로, $g'\left(\frac{a}{2}\right)=0$

$0<p<\frac{a}{2}$일 때 $g'(p)>0$, $\frac{a}{2}<p<a$일 때 $g'(p)<0$이므로 $p=\frac{a}{2}$**에서** $g(p)$**가 최대**

$\mathrm{B}_6=\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)$**일 때, 최대 평균**

(※ 일계도함수를 이용하는 대신 이계도함수를 이용하여도 인정)