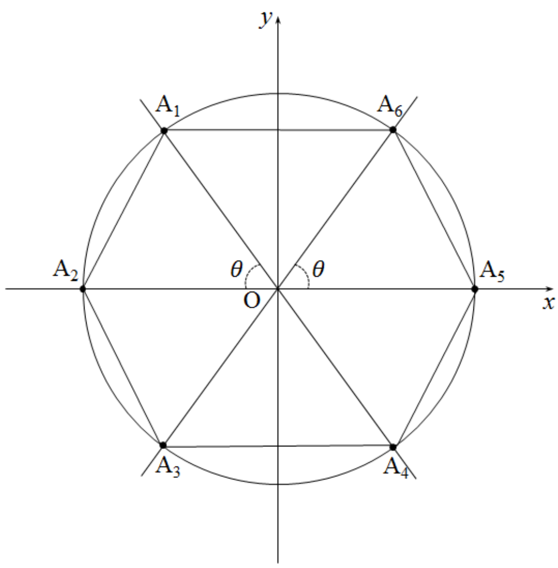
2015학년도 논술고사 예시답안(자연계I)

논제 I-수학

[논제 I−1]

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$이면 원의 중심에 대하여 대칭이므로 A_1을 포함하는 경우만 생각하면 된다.



표기의 편의를 위하여 삼각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$는 (i,j,k)로 표시하기로 한다.

주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(1,4,5)$, $(1,4,6)$의 7가지 종류가 있다.

이 중에서 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,6)$, $(1,4,5)$, $(1,4,6)$는 합동인 직각삼각형이고, $(1,3,5)$는 정삼각형이다.

각각의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3})^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

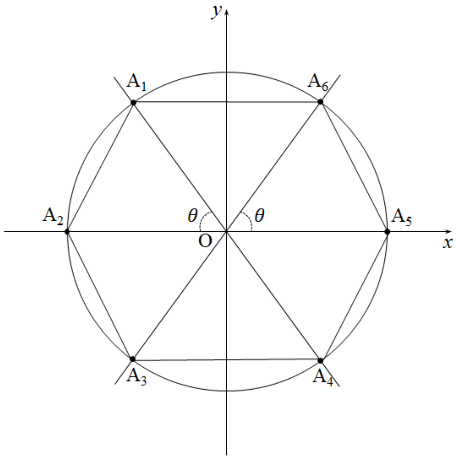
따라서 확률분포표는 아래와 같다.

X	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{6}{7}$	$\dfrac{1}{7}$	1

그러므로 확률변수 X의 평균은 $\frac{6}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{28}$이다.

[논제 I-2]

θ가 임의의 각일 때, 주어진 점들이 x축, y축에 대하여 대칭임을 감안하여 주어진 조건을 만족하는 삼각형을 분류하자.



삼각형은 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$의 7가지 종류가 있다.
이 중에서 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$는 합동인 직각삼각형이고,
$(1,3,4)$, $(1,3,6)$도 서로 합동인 직각삼각형이며,
$(1,3,5)$는 이등변삼각형이다.
중심각을 이용하여 각각의 넓이와 그 확률을 구하면 아래와 같다.

$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta\cdot 2=\sin\theta$, 확률 $\frac{4}{7}$

$(1,3,4)$, $(1,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta\cdot 2=\sin 2\theta$, 확률 $\frac{2}{7}$

$(1,3,5)$: 넓이 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$, 확률 $\frac{1}{7}$

따라서 확률변수 X의 평균은 $\frac{4}{7}\sin\theta+\frac{2}{7}\sin 2\theta+\frac{1}{7}\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{5}{14}(2\sin\theta+\sin 2\theta)$이다.

[논제 I-3]

확률변수 X의 평균은

$f(\theta)=\frac{5}{14}(2\sin\theta+\sin 2\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이다.

$$f'(\theta)=\frac{5}{14}(2\cos\theta+2\cos 2\theta)=\frac{5}{7}(\cos\theta+\cos 2\theta)=\frac{5}{7}(\cos\theta+2\cos^2\theta-1)=\frac{5}{7}(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$

따라서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$의 범위에서 $f'(\theta)=0$이 되는 경우는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

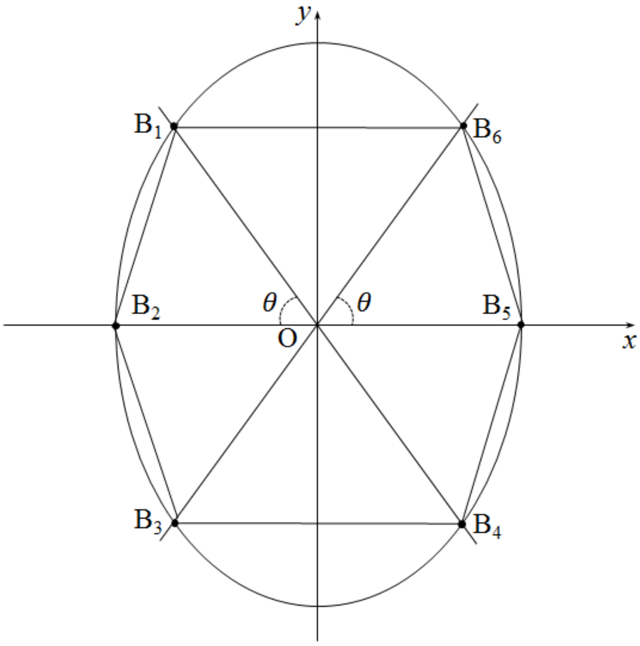
$f''(\theta)=\frac{5}{7}(-\sin\theta-2\sin 2\theta)<0$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극대이다.

$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{7}=\frac{20}{28},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{15\sqrt{3}}{28}$ 이므로

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때, 확률변수 X의 평균이 최대가 된다.

[논제 I-4]

B_6의 좌표가 (p, q)이므로 $0<p<a,\ 0<q<\frac{1}{a}$ 이다.



또한 (p, q)는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+a^2y^2=1$ 위의 점이므로 $q=\frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$ 이다.

앞의 논제와 마찬가지로 주어진 점들이 x축, y축에 대하여 대칭임을 감안하여 주어진 조건을 만족하는 삼각형을 분류하면

$(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,2,5),\ (1,2,6),\ (1,3,4),\ (1,3,5),\ (1,3,6),\ (2,3,4),\ (2,3,5),\ (2,3,6)$

의 10가지 종류가 있다.

이 삼각형들을 합동인 것으로 분류하여 $a,\ p,\ q$로 표현한 넓이와 이에 대응하는 확률은 아래와 같다.

$(1,2,3)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot(a-p)=q(a-p)$, 확률 $\frac{1}{10}$

$(1,2,4),\ (1,2,5),\ (2,3,5),\ (2,3,6)$: 넓이 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot q=aq$, 확률 $\frac{4}{10}$

$(1,2,6),\ (2,3,4)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot q=pq$, 확률 $\frac{2}{10}$

$(1,3,4),\ (1,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot 2p=2pq$, 확률 $\frac{2}{10}$

$(1,3,5)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot(a+p)=q(a+p)$, 확률 $\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\frac{1}{10}(q(a-p)+4aq+2pq+2(2pq)+q(a+p)) = \frac{1}{10}(6aq+6pq)=\frac{3}{5}(a+p)q$$
$$=\frac{3}{5}(a+p)\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$$

이다.

$g(p)=(a+p)\sqrt{a^2-p^2}$ 이라고 정의하자.

$$g'(p)=\sqrt{a^2-p^2}+(a+p)\frac{-2p}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-p^2}}=\frac{-(2p-a)(p+a)}{\sqrt{a^2-p^2}}$$

$0<p<a$이고 $0<a<1$이므로, $g'\left(\frac{a}{2}\right)=0$이다.

또한 $0<p<\frac{a}{2}$일 때 $g'(p)>0$이고, $\frac{a}{2}<p<a$일 때 $g'(p)<0$이므로

$p=\frac{a}{2}$에서 $g(p)$가 최대가 된다.

따라서 $\mathrm{B}_6=\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)$일 때, 확률변수 Y의 평균이 최대가 된다.