<2015학년도 경희대학교 수시 논술고사>

예 시 답 안 (의학계)

[논제 I] 수학

논제 I-1

도형 P_{n+1}을 만들 때, 도형 P_n에 붙인 S_{n+1}과 합동인 정사각형의 총 개수를 N_{n+1}이라고 하면,

$N_2 = 4$, $N_{n+1} = 3N_n$이고 일반항은 $N_n = 4 \cdot 3^{n-2}$ $(n \geq 2)$이다.

정사각형 S_n의 넓이를 a_n이라고 하면,

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = r^2 a_n$을 만족하는 등비수열로서 일반항이 $a_n = 4r^{2n-2}$ $(n \geq 1)$이다.

도형 P_n을 만들기 위하여 사용된 모든 정사각형들의 넓이의 합을 A_n이라고 하면,

$A_1 = 4$, $n \geq 1$일 때,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1}N_{n+1} = A_n + 4r^{2n}(4 \cdot 3^{n-1}) = A_n + \frac{16}{3}(3r^2)^n$$

을 만족하여,

$$A_n = 4 + \frac{16}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(3r^2)^i \quad (n \geq 2)$$

이다.

그래서 수열 $\{A_n\}$은 $r \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때, 발산하고, $0 < r < \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때, $4 + \frac{16r^2}{1-3r^2}$으로 수렴한다.

논제 I-2

도형 P_n을 만들 때, 사용된 모든 정사각형의 각 변에서 지워지지 않은 부분의 길이의 합을 L_n이라고 하자.

정사각형 S_n의 한 변의 길이를 b_n이라고 하면,

$b_1 = 2$, $b_{n+1} = rb_n$을 만족하므로 $b_n = 2r^{n-1}$이다.

P_{n+1}을 만드는 단계에서 추가되는 S_{n+1}과 합동인 각 정사각형은 두 변의 길이만큼 총 길이의 합을 증가시킨다.

이로부터 $L_1 = 8$, $n \geq 1$일 때,

$$L_{n+1} = L_n + 2b_{n+1}N_{n+1} = L_n + 2 \cdot 2r^n(4 \cdot 3^{n-1}) = L_n + \frac{16}{3}(3r)^n$$

을 만족하여,

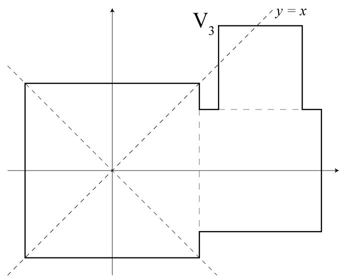
$$L_n = 8 + \frac{16}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(3r)^i \quad (n \geq 2)$$

이다.

그래서 수열 $\{L_n\}$은 $r \geq \frac{1}{3}$일 때, 발산하고, $0 < r < \frac{1}{3}$일 때, $8 + \frac{16r}{1-3r}$로 수렴한다.

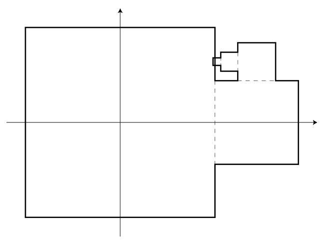
논제 I-3

(i) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 인 경우



오른쪽 그림에서처럼 P_3을 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 위 꼭짓점 V_3은 $(1+r-r^2, r+2r^2)$의 좌표를 가지므로, 이 경우 V_3의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$이다. 따라서 V_3은 직선 $y=x$의 위 쪽에 위치한다. P_3이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이기 때문에 V_3을 꼭짓점으로 가지는 정사각형은 이 정사각형과 $y=x$에 대하여 대칭인 정사각형과 겹친다.

(ii) $r=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 인 경우



오른쪽 그림에서처럼 P_3을 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 변의 x좌표를 x_3, P_4와 P_5를 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 변의 x좌표를 각각 x_4와 x_5라 하면,

$x_3=1+r-r^2$이고 $x_4=1+r-r^2-2r^3$, $x_5=1+r-r^2-2r^3-2r^4$ 이므로,

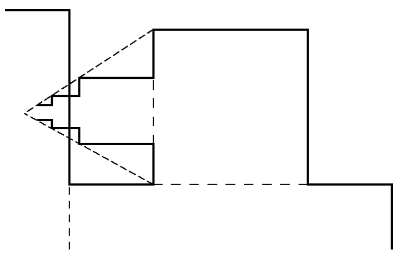
이 경우 $x_3=1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{5}$, $x_4=1+\dfrac{3-\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$, $x_5=1+\dfrac{3\sqrt{5}-7}{25}$ 이다.

그런데 $x_3>1$이고 $x_4>1$이지만, $x_5<1$이기 때문에,

P_5를 만들 때 추가된 정사각형이 P_1과 겹치게 된다.

논제 I-4

아래 그림과 같이 P_3을 만들 때 오른쪽 위에 추가된 사각형의 왼쪽에 정사각형이 계속 추가되는 상황을 생각하자.



이 중에서 $P_n\ (n \geq 4)$을 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 변의 x좌표를 x_n이라고 하면, 일반항은

$$x_n=1+r-r^2-2r^3-2r^4-\ \cdots\ -2r^{n-1}$$

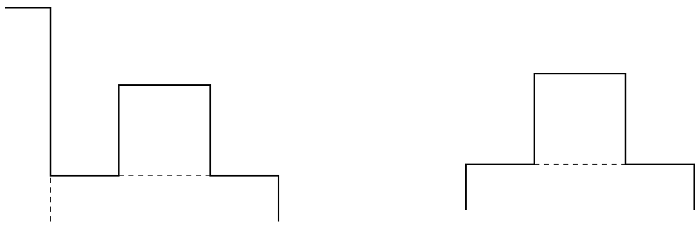
이다.

$0<r<1$ 이므로 수열 $\{x_n\}$은 수렴하고 그 극한값은 $1+r-r^2-\dfrac{2r^3}{1-r}$ 이다.

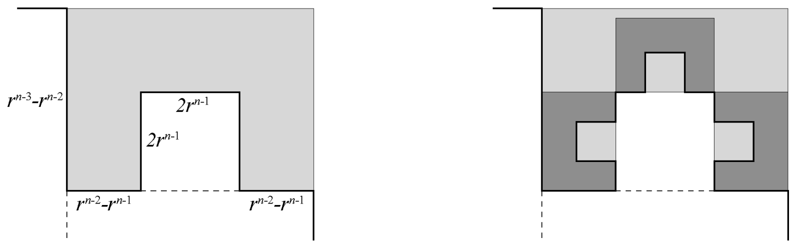
만약 이 값이 1보다 작으면 어떤 적당한 n에 대하여 P_n을 만들 때 추가되는 정사각형이 P_1과 겹친다. 그래서 정사각형들이 겹치지 않는 P_n을 만들려면 $1 \leq 1+r-r^2-\dfrac{2r^3}{1-r}$ 이어야 한다.

이 부등식을 만족하는 r의 범위는 $r \leq \sqrt{2}-1$이고, 정사각형들이 겹치지 않을 필요조건이다.

역으로, $r \le \sqrt{2}-1$이라고 가정하자.
도형 P를 만들 때 사용되는 모든 정사각형이 겹치지 않음을 보여야 한다.
P_1과 P_2는 정사각형들이 서로 겹치지 않는 도형이다.
$n \ge 3$인 경우, P_n을 만들 때 추가되는 정사각형은 P_n의 대칭성에 의하여 다음 두 가지 형태로 붙는다고 말할 수 있다.



다음 단계 P_{n+1}을 만들기 위하여 S_{n+1}과 합동인 정사각형을 붙일 때,
추가되는 정사각형이 아래 왼쪽 그림의 색칠된 영역 안에 모두 들어갈 충분조건은,
S_{n+1}의 변의 길이가 $2r^n$이므로, $r^{n-2}-r^{n-1} \ge 2r^n$과 $r^{n-3}-r^{n-2}-2r^{n-1} \ge 2r^n$이다.



그런데, $r \le \sqrt{2}-1$이기 때문에,

$$(r^{n-2}-r^{n-1})-2r^n = r^{n-2}(1-r-2r^2) = r^{n-2}(1-2r)(1+r) \ge 0$$

이고

$$(r^{n-3}-r^{n-2}-2r^{n-1})-(r^{n-2}-r^{n-1}) = r^{n-3}(1-2r^2-r^2) \ge 0$$

이므로,

$$r^{n-3}-r^{n-2}-2r^{n-1} \ge r^{n-2}-r^{n-1} \ge 2r^n$$

이다.
따라서 단계 P_{n+1}에 변의 길이가 $2r^n$인 정사각형을 붙일 때, 추가되는 정사각형이 위 왼쪽 그림의 색칠된 영역 안에 모두 들어간다. 그런데 P_{n+1}에 추가되는 다른 정사각형들은 바로 위 오른쪽 그림처럼 짙게 표시된 영역에 들어가며, 이 영역들이 서로 만나지 않으므로, 추가되는 사각형들이 서로 겹치지도 않고 앞 단계의 도형들과도 겹치지 않음을 알 수 있다.

[논제 Ⅱ] 물리

논제Ⅱ-1

코일과 축전기의 용량이 클수록 각각에 저장할 수 있는 전기에너지가 커지므로 왕복하는 전류의 주기는 길어진다. 따라서 스피커에서 발생되는 소리의 주파수는 가변 축전기의 전기용량이 커질수록 작아진다. 축전기의 전류를 방해하는 정도(용량 리액턴스)는 주파수와 전기용량에 반비례하고, 코일의 전류를 방해하는 정도(유도 리액턴스)는 주파수와 유도용량에 비례한다. 이 두 정도가 같을 때로부터 LC회로의 공진주파수(공명주파수, 고유진동수)는 $\frac{1}{\sqrt{C}}$에 비례함을 알 수 있다. 이 공진주파수의 전기신호가 스피커를 통해 소리로 바뀌므로 소리의 주파수도 $\frac{1}{\sqrt{C}}$에 비례한다. (그림) 425Hz의 소리보다 한 옥타브 위의 소리를 내기 위해서는 주파수가 2배인 850Hz가 되어야 하므로 가변 축전기의 전기용량은 원래 값 12μF의 1/4배인 3μF이다.

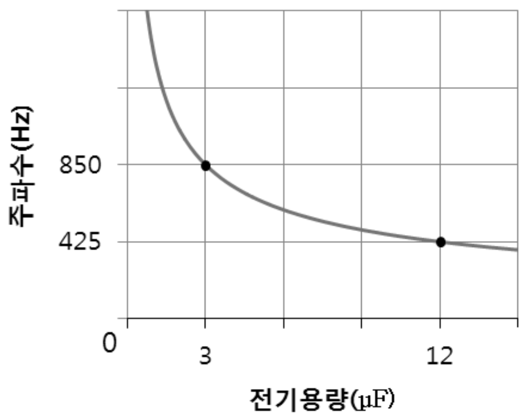


그림 전기용량에 대한 스피커에서 발생되는 소리의 주파수

논제Ⅱ-2

소리의 속도는 340m/s이고 주파수는 425Hz이므로 소리의 파장은 $\lambda = v/f$로부터 80cm이다.

한 쪽 끝이 열리고 다른 쪽 끝이 닫힌 관에서는 음파가 갇힌 관 안으로 진행하다가 관의 닫힌 끝에 닿으면 위상이 반대로 바뀌면서 반사한다. 안으로 진행하는 음파와 반사되어 나오는 음파가 정상파를 이루면 공명이 일어난다. 이때 소리의 파장을 λ라고 하면 공명이 일어나는 관의 길이는 $\frac{1}{4}\lambda$의 홀수배 즉 $d = \frac{(2n-1)\lambda}{4}$ (단, $n = 1,2,3\cdots$)일 때이다. 따라서 공명이 일어나는 관의 길이 d의 조건은 20cm, 60cm, 100cm.. 등(20cm의 홀수배)이다.

논제Ⅱ-3

위의 논제로부터 d가 40cm의 정수배(40cm, 80cm...)만큼 바뀌도록 추를 얹거나 제거해야 함을 알 수 있다. 물의 전체 부피는 변하지 않으므로 유리관에서 수면의 높이가 40cm 바뀌면 수조의 수면 높이는 반대 방향으로 5cm 바뀌어 유리관과 수조의 수면 높이차가 45cm만큼 생기게 된다. 추의 질량 차이에 의해 생기는 압력이, 길이가 45cm의 정수배에 해당하는 높이를 가진 물기둥에 의해 생기는 압력과 같아야 하므로($\frac{|\mathrm{M}-\mathrm{M}'|g}{A_{\text{수조}}} = \rho g H$, H=45cm, 90cm...) 추의 질량 차이는 물의 밀도, 깊이차, 수조의 단면적의 곱인 1.8kg의 정수배(1.8kg, 3.6kg...)이다.

(* 또는 다음과 같이 설명할 수 있다.)
n번째 공명 조건을 만족할 때 유리관의 깊이 d를 d_n, 유리관의 끝에서 수조 수면까지의 길이를 h_n, 추의 질량을 m_n이라고 하자. 즉 $(h_n - d_n)$이 두 수면의 높이 차이이고, n이 커질수록 공명을 만족하는 유리관의 깊이 d_{n+1}의 크기는 커진다.
수조의 단면적을 $A_{수조}$, 유리관의 단면적을 $A_{유리관}$라고 할 때 물의 전체부피가 변하지 않는다는 것으로부터 다음 식을 얻는다.

$$(h_n - h_{n+1}) = \frac{A_{유리관}}{A_{수조}}(d_{n+1} - d_n) \qquad (식1)$$

물의 밀도를 ρ라고 할 때 파스칼의 법칙으로부터 $\dfrac{m_n g}{A_{수조}} = \dfrac{\rho(h_n - d_n)A_{유리관}g}{A_{유리관}}$이다.

즉 $(h_n - d_n) = \dfrac{m_n}{\rho A_{수조}}$ 이다. (식2)

한편, $n+1$번째 공명 조건에서도 동일한 관계식이 성립하므로

$(h_{n+1} - d_{n+1}) = \dfrac{m_{n+1}}{\rho A_{수조}}$ 이다. (식3)

(식2)와 (식3)로부터

$(d_{n+1} - d_n) + (h_n - h_{n+1}) = \dfrac{m_n - m_{n+1}}{\rho A_{수조}}$ 이다. (식4)

(식1)과 (식4)로부터 다음 식을 얻는다.

$$(m_n - m_{n+1}) = \rho(A_{수조} + A_{유리관})(d_{n+1} - d_n) \qquad (식5)$$

한편, $d_{n+1} - d_n = \dfrac{v_o}{2f_o}$이므로(단, v_o는 공기의 속도, f_o는 스피커에서 나오는 소리의 주파수)

$(m_n - m_{n+1}) = (A_{수조} + A_{유리관})\dfrac{\rho v_o}{2f_o}$ 이다.

$A_{수조} = 40\,cm^2, A_{유리관} = 5cm^2, \rho = 1g/cm^3, v_o = 340\,m/s, f_0 = 425Hz$이므로

$(m_n - m_{n+1}) = (40+5)\dfrac{1\times340\times100}{2\times425}\mathrm{g} = 1.8\,\mathrm{kg}$ 이다.

따라서 추의 질량차이$|\mathrm{M}-\mathrm{M}'|$은 1.8 kg의 정수배만 가능하다.

논제Ⅱ-4

공기 중에서 공명을 가능하게 하는 d 값들 중 두 번째로 작은 값은 60cm로 공기에서의 파장의 3/4배이다. 소리의 속력이 공기에서보다 빨라지면 이 기체에서 소리의 파장은 공기에서의 파장인 80cm보다 길어진다. 따라서 60cm는 파장의 1/4이어야 하고, 파장은 240cm이 된다. 주파수가 같을 때 파장과 속력은 비례하므로 이 공기에서의 소리의 속력은 공기의 3배이다. 기체분자의 평균 운동에너지는 온도가 같으면 같다. 운동에너지는 질량과 속도의 제곱에 비례하므로, 같은 운동에너지를 가진다면 질량이 작은 경우에 속력이 더 크다. 기체분자의 운동속력이 빨라지면 소리의 속력도 빨라지므로, 이 기체분자의 질량은 공기분자의 평균질량보다 작다.

[논제 Ⅱ] 화학

논제 II-1

(1) 적철석(Fe_2O_3)을 환원시킬 때 고체 탄소(C)를 환원제로 사용하는 반응에서 탄소가 완전 산화된다고 가정하면 생성물은 금속 물질 철(Fe)과 기체 이산화 탄소(CO_2)이다. 따라서 이 때의 화학 반응식은 아래와 같다.

$$Fe_2O_3(s) + \frac{3}{2}C(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}CO_2(g)$$

화학 반응식의 계수비를 통해 반응물과 생성물의 양적 관계를 알 수 있다. 즉, 1 몰(mole)의 적철석이 환원되면 기체 이산화 탄소가 $\frac{3}{2}$ 몰(mole) 배출된다. 적철석과 이산화 탄소의 분자량은 각각 160, 44이므로 320 톤의 적철석을 환원시킬 때 배출되는 기체 이산화 탄소의 질량은 132 톤이다.

(2) 고체 탄소(C)를 환원제로 사용하여 적철석(Fe_2O_3)을 환원시키는 반응에서의 엔탈피 변화는 탄소를 사용하지 않고 적철석을 환원시키는 반응의 엔탈피 변화(+820 kJ), 제시문 (다)에 제시된 탄소의 완전 연소 반응의 연소열(ΔH_1), 그리고 헤스 법칙을 활용하여 아래 계산에서와 같이 +235 kJ임을 알 수 있다.

$$Fe_2O_3(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}O_2(g),\ \Delta H = +820\ kJ$$

$$\frac{3}{2}C(s) + \frac{3}{2}O_2(g) \rightarrow \frac{3}{2}CO_2(g),\ \Delta H = \frac{3}{2}\Delta H_1 = \frac{3}{2}(-390\ kJ) = -585\ kJ$$

$$\therefore Fe_2O_3(s) + \frac{3}{2}C(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}CO_2(g),\ \Delta H = (+820\ kJ) + (-585\ kJ) = +235\ kJ$$

이 때 수반되는 엔트로피 변화(ΔS)는 탄소 환원제를 사용하지 않고 적철석을 환원시키는 반응의 엔트로피 변화와 동일하다고 가정할 수 있으므로, 탄소 환원제를 사용하여 적철석을 환원시키는 반응의 열화학 반응식은 아래와 같다.

$$Fe_2O_3(s) + \frac{3}{2}C(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}CO_2(g),\ \Delta H = +235\ kJ$$
$$\Delta S = +90\ J/K$$

따라서, 탄소 환원제를 사용하여 적철석을 환원시키는 반응이 자발적으로 일어날 수 있는 온도는 아래 계산을 통해 구해보면 2611 K (약 2600 K) 이상인 것을 알 수 있다.

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = (+235\ kJ) - T \times (+90\ J/K) < 0$$
$$\therefore\ T > 2611\ K\ (\fallingdotseq 2600\ K)$$

반면, 탄소 환원제를 사용하지 않고 적철석을 환원시키는 반응의 주어진 아래 열화학 반응식을 살펴보면,

$$Fe_2O_3(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}O_2(g),\ \Delta H = +820\ kJ$$
$$\Delta S = +90\ J/K$$

탄소 환원제를 사용하지 않고 적철석을 환원시키는 반응이 자발적으로 일어날 수 있는 온도는 아래 계산을 통해 9111 K (약 9100 K) 이상의 고온인 것을 알 수 있다.

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = (+820\ \text{kJ}) - T(+90\ \text{J/K}) < 0$$
$$\therefore\ T > 9111\ \text{K}\ (\fallingdotseq 9100\ \text{K})$$

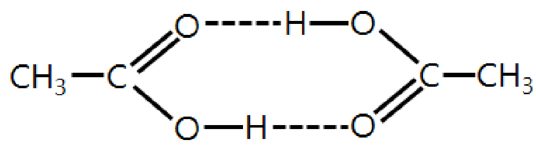
즉, 적철석을 환원시켜 철을 얻는 경우에 탄소 환원제를 사용하지 않는 경우에 비하여 탄소를 사용하는 경우에는 반응이 자발적으로 일어날 수 있는 반응 온도가 상대적으로 낮아진다는 이점이 있다.

논제 II-2

(1) I_2는 I^-로부터 비공유 전자쌍을 받는 루이스 산으로 작용하고, I^-은 I_2에게 비공유 전자쌍을 내놓는 루이스 염기로 작용하여 산-염기 반응으로 I_3^-이 생성된다.

물은 전기 음성도가 큰 산소와 전기 음성도가 작은 수소에 의한 극성 공유 결합을 가지고 굽은 구조를 가져 쌍극자 모멘트를 갖는 극성 분자이다. 반면에 I_2는 무극성 공유 결합을 갖는 대칭성 분자이므로 쌍극자 모멘트의 합이 0인 무극성 분자이다. 따라서 I_2는 극성 분자인 물에 잘 녹지 않는다. 그러나 I_3^-은 음전하를 갖는 음이온이므로 극성 분자인 물에 잘 녹는다.

(2) 벤젠에 2.4 g의 아세트산을 녹인 용액의 어는점 내림은 1.02 ℃이며, 제시문에서 주어진 관계식 $\Delta T_f = (5.50 - 4.48) = 1.02 = 5.12 \times m$ 을 이용하여 벤젠에 녹아 있는 용질의 몰랄 농도를 구하면 0.20 m이다.
구한 용질의 몰랄 농도로부터 관계식
0.20 m = 용질 몰수(mole)/0.100 kg
을 이용해 용질의 몰수를 구하면, 벤젠에 녹아 있는 용질의 몰수는 0.02 몰이다.
벤젠에 존재하는 용질의 분자량은 벤젠에 녹인 용질의 질량을 용질의 몰수로 나누어 준 값과 같다. 따라서 벤젠에 녹인 아세트산의 질량은 2.4 g이므로 벤젠에 녹아 있는 용질의 분자량은 120 g/몰이 된다.
한편, 아세트산의 분자식은 $C_2H_4O_2$이므로 아세트산의 분자량은 60 g/몰이다.
벤젠에 녹아 있는 용질의 분자량은 아세트산 분자량의 2배이므로 벤젠에 녹아 있는 용질은 두 분자의 아세트산이 두 개의 수소 결합을 하고 있는 아래와 같은 구조를 갖는다.



<논제 Ⅱ> 생명과학

논제Ⅱ-1

제시문 [나](시칠리아 의학파)에서는 악기를 몸으로, 악기에 의해 연주되어 나오는 화음을 영혼으로 비유한다. 따라서 영혼은 그 자체로 존재하지 않을 뿐 아니라 몸의 성질에 따라 변하는 어떤 것이 되는데, 대표적인 유물론적 견해의 하나라 볼 수 있다. 반면 제시문 [다](플라톤)에서는 몸에 대한 영혼의 우위성이 거듭하여 강조된다. 이러한 입장에 따르면 선원과 협력해서 배를 안전하게 운항해야 하는 선장처럼 영혼은 열등한 몸보다 우위에 있는 것이고, 영혼을 방해하고 심지어 오염시키는 몸으로부터 영혼을 분리시킴으로써 자신을 깨끗하게 해야 하는 것이 된다. 따라서 제시문 [가]에서 프랑스 국회의원의 행동을 바라보는 '나'의 관점은 몸(뇌의 전두엽)에 이상(병)이 생겨 무절제한 행동으로 이어졌다고 본다는 점에서 제시문 [나]의 입장에 가깝다. 반면 [가]에서 친구의 관점은 영혼을 정화하지 못한 비윤리적 행동으로 비하하여 바라본다는 점에서 제시문 [다]의 입장에 가깝다고 볼 수 있다.

논제Ⅱ-2

많은 질병은 **항상성**을 유지하려는 <u>균형이 깨지면서</u> 발생한다.

논제Ⅱ-3

뇌 세포가 비정상적으로 죽거나 증식하는 경우, 또는 정상적인 시냅스의 형성이 교란되는 경우 뇌의 전두엽에 기능 이상이 생길 수 있다. 전두엽은 행동을 계획하고, 반응을 선택하거나 억제하며, 정서를 통제하고, 의사결정을 내리는 기능을 담당하므로 전두엽에 기능 이상이 생기면 상황에 맞게 본능적 충동을 억제하는 기능이 약화되거나 소실될 수 있다. 이에 '나'는 제시문 [가]에 나타난 프랑스 국회의원의 비정상적인 행동의 원인이 전두엽의 기능 이상(병)에 의한 것이라고 판단한 것이다.

논제Ⅱ-4

뇌종양은 종양 덩어리 주위 신경을 압박하거나 신경 전달 물질의 과다분비를 통한 신경 손상에 의해 전두엽의 기능 이상(병)을 유발할 수 있다. [가]에서 언급된 프랑스 국회의원의 비정상적인 행동은 뇌종양을 포함한 여러 기질적 요인에 기인할 수도 있지만, 환경적, 사회문화적 영향 또한 무시할 수 없다. 따라서 국회의원에게 뇌종양이 발생한 것은 전두엽에 병이 생긴 것임에 틀림없다는 '나'가 내린 판단이 옳았음을 설명해주는 가능한 원인 중 하나이지만, 섣부른 예측성 진단임을 부인할 수 없다.