[문제 3-3] [문제 3-2]에서 구한 $V(x)$와 $J(x)$의 도함수에 대한 관계를 이용하여 $V(x)$의 2계 도함수와 $V(x)$ 사이의 관계식을 구하시오. 그리고 $J(x)$의 2계 도함수와 $J(x)$ 사이의 관계식을 구하시오.

2) 출제의도, 채점기준, 모범답안

(1) 공학계열

■ 출제의도

[문제 1]

고등학교 수학 교과과정에서 중요하게 다루는 지수함수 및 로그함수에 대한 이해도를 파악하고 관련 계산능력을 평가하기 위한 문제이다. 램버트-비어 법칙과 유도방출 현상 및 레이저의 발진원리를 제시문에 소개하여 지수-로그 함수가 물리 현상과 매우 밀접한 연관이 있음을 설명하였고, 이를 바탕으로 주어진 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

[문제 2]

본 문제는 고등학교 수학 교과과정에서 배운 기하와 벡터의 활용 및 계산 능력을 평가하기 위해 출제하였다. 일차변환에 의한 도형의 이동, 타원식의 이해, 좌표공간에서 벡터의 활용 등의 내용을 다루어 기하와 벡터에 대한 기본적인 이해 정도와 활용능력을 평가하고자 하였다.

[문제 3]

고등학교 물리 교과과정에서 배운 전기회로의 기본적인 개념인 전류와 전압의 이해를 평가하기 위하여 출제하였다. 또한 수학 교과과정에서 배운 자연상수와 허수에 대한 이해도를 바탕으로 미분의 정의 및 2계 도함수에 대한 개념을 종합적으로 평가하기 위한 문제이다.

■ 채점기준

[문제 1]

[문제 1-1] 지수함수 형태로 표현되는 램버트-비어 법칙을 주어진 문제에 적용할 수 있는 능력을 평가한다.

[문제 1-2] 지수함수 문제의 계산 능력을 평가한다.
[문제 1-3] 제시문에 주어진 레이저 발진 현상을 이해하고, 문제에 적용하여 지수 부등식을 세우고 이를 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

[문제 2]
[문제 2-1] 일차변환에 의한 도형의 이동과 회전체의 부피를 정확히 계산하는 능력을 평가한다.
[문제 2-2] 타원의 정의 등 기본 개념을 이해하고 있는지, 그리고 두 그래프가 만나는 점을 정확히 계산할 수 있는지 평가한다.
[문제 2-3] 위치벡터, 벡터의 성분, 직선의 벡터방정식, 내적의 개념 등을 이용하여 공간좌표에서 벡터의 개념을 활용할 수 있는지 평가한다.

[문제 3]
[문제 3-1] 전압과 전류에 대한 법칙을 이해하고 이를 문제에 적용할 수 있는 능력을 평가한다.
[문제 3-2] 자연상수와 허수를 사용하여 미분의 정의를 정확하게 적용할 수 있는 능력을 평가한다.
[문제 3-3] 도함수의 존재조건을 이해하고 도함수와 2계 도함수를 구하고 특히 상수함수의 2계 도함수를 구하는 능력을 평가한다.

■ 모범답안

【문제 1】 (30점)

[문제 1-1]
[채점기준] 총 10점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.
램버트-비어 공식의 양변에 로그를 취하면,

$$\ln T = -\epsilon c x$$

이를 구하고자 하는 농도에 대해 정리하면,

$$c = \frac{-\ln T}{\epsilon x}$$ [5점]

문제에서 주어진 값을 활용하여,

$T = 0.99$이므로 $\ln 0.99 = \ln 9.9 - \ln 10 = 2.29 - 2.30 = -0.01$

$\epsilon = 4 \times 10^{-6}\ (m^2/mol)$

$x = 2\,(m)$

위 식에 대입하면,

$$c = \frac{-(-0.01)}{(4\times 10^{-6})(2)} = 1.25\times 10^{3}$$ [3점]

$$c = 1.25\times 10^{3}\,(mol/m^{3}) = 1.25\times 10^{-3}\,(mol/cm^{3})$$ [2점]

* 계산은 맞았으나 단위를 틀리거나 표기하지 않으면 -2점

[문제 1-2]

[채점기준] 총 10점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

투과도가 50%가 되는 길이를 l이라고 하면 램버트-비어 법칙으로부터,

$$l = \frac{-\ln T}{\epsilon c}$$ [5점]

문제에서 주어진 값을 활용하여,

$T = \frac{1}{2}$이므로 $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = -0.69$

$$\epsilon = 4\times 10^{-6}\,(m^{2}/mol)$$

$$c = 1.25\times 10^{3}\,(mol/m^{3})$$

$$l = \frac{-(-0.69)}{(4\times 10^{-6})(1.25\times 10^{3})} = 1.38\times 10^{2}\,(m)$$ [5점]

* 계산은 맞았으나 단위를 틀리거나 표기하지 않으면 -2점

[문제 1-3]

[채점기준] 총 10점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

제시문에 주어진 광 이득 계산식을 활용하면,

$$I_1 = I_0 e^{(g-\alpha)L}$$

$$I_2 = I_1 R = I_0 R e^{(g-\alpha)L}$$

$$I_3 = I_2\, e^{(g-\alpha)L} = I_0 R e^{2(g-\alpha)L}$$

레이저 발진 조건에 의하면 $I_3 \geq I_0$이므로,

$$Re^{2(g-\alpha)L} \geq 1$$ [5점]

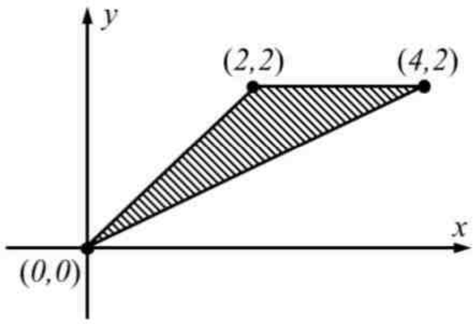
$$\ln R \geq -1$$

$$R \geq e^{-1},\ R \geq 0.37$$ [3점]

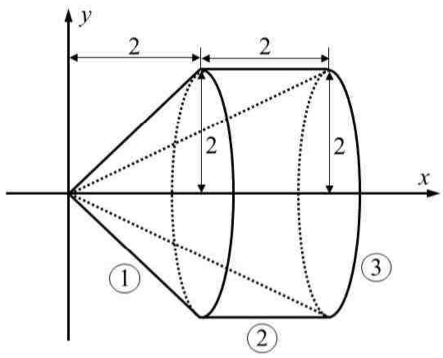
$$0.37 \leq R \leq 1$$ [2점]

【문제 2】 (40점)

[문제 2-1]
[채점기준] 총 12점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.
문제에서 주어진 변환 f에 의해 그림의 세 점 (0, 0), (0, 2), (2, 0)은 각각 (0, 0), (2, 2), (4, 2)로 옮겨진다. 따라서 옮긴 후 생기는 도형은 아래 그림과 같다. [4점]



위의 도형을 x축을 중심으로 회전시켜 생기는 회전체는 아래 그림과 같다.



원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r은 원뿔 밑면적의 반지름, h는 원뿔의 높이), 원기둥의 부피는 $\pi r^2 h$ (r은 원기둥 밑면의 반지름, h는 원기둥의 높이) 이므로, 원뿔 ①과 원기둥②, 원뿔 ③의 부피를 구하면 다음과 같다.

원뿔 ①의 부피 = $\frac{1}{3}\pi(2)^2 2 = \frac{8}{3}\pi$, 원기둥 ②의 부피 = $\pi(2)^2 2 = 8\pi$, 원뿔 ③의 부피 = $\frac{1}{3}\pi(2)^2 4 = \frac{16}{3}\pi$

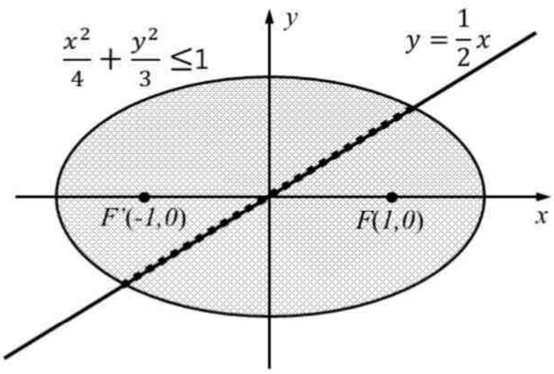
회전체의 부피를 구하기 위해 원뿔 ①의 부피와 원기둥②의 부피의 합에서 원뿔 ③의 부피를 빼면,

회전체의 부피$= \frac{8}{3}\pi + 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$ (5.333π, $5.333 \times 3.14 = 16.746$ 도 정답)

[8점]
* 회전체 부피 계산을 위해 적분을 이용해도 인정
[문제 2-2]
[채점기준] 총 12점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.
문제에서 제시된 첫 번째 고려사항 $\overline{PF'}+\overline{PF}\le 4$ 는 타원의 내부를 의미한다. 초점이 $(1,0),(-1,0)$이므로 타원의 방정식에서 $c=1$이고, 거리의 합이 4이므로 $a=2$이다. 또한, $b^2=a^2-c^2$이므로 $b^2=3$이다. 따라서 타원의 내부를 나타내는 식은 다음과 같다.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1$ [5점]

두 가지 고려사항을 모두 만족하는 $P(x,y)$의 위치는 아래 그림과 같이 타원 내부의 직선이다.



따라서 공공도서관의 위치 $P(x,y)$의 x범위를 타원식과 직선식을 이용하여 구하면,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(x/2)^2}{3}\le 1$$

$$x^2\le 3$$

$$-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$$ [7점]

※ $\sqrt{3}=1.7321$ 이므로 $-1.7321\le x\le 1.7321$도 정답
※범위를 정확히 안 쓰고 $\sqrt{3}$ 만 쓰면 7점 중 4점 감점

[문제 2-3]

[채점기준] 총 16점

직선의 벡터 방정식을 이용하여 위치벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$의 성분을 구하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{u_A} = (s, 2s, 5-s)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{u_B} = (-1+2t, 1+t, t)$$

두 벡터로부터 벡터 $\overrightarrow{PQ}$의 성분을 구하면,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-1-s+2t, 1-2s+t, -5+s+t)$$ [5점]

제시문 다)에서 주어진 대로 두 직선 사이의 최단거리는 두 직선에 모두 수직인 선분의 길이이다.

두 직선에 모두 수직인 벡터 $\overrightarrow{PQ}$는 방향벡터 $\overrightarrow{u_A}$, $\overrightarrow{u_B}$와의 내적을 이용해서 구할 수 있다. 두 벡터가 수직일 때 두 벡터의 내적은 0이므로,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{u_A} = 6-6s+3t = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{u_B} = -6-3s+6t = 0$$

위의 두 식을 연립하여 s, t를 구하면,

$s = 2,\ t = 2$ [3점]

위에서 구한 s, t를 통해 두 직선에 모두 수직인 $\overrightarrow{PQ}$의 성분을 구하면,

$$\overrightarrow{PQ} = (1, -1, -1)$$

두 직선 사이의 최단거리는 벡터 $\overrightarrow{PQ}$의 크기이므로, $\sqrt{3}$ 이다. [8점]

【문제 3】 (30점)

전제조건) 이 문제는 과학에서 사용되는 키르히호프 법칙을 만족하기 위하여 전압(v)과 전류(j)가 잘 정의되고 미분 가능한 함수이다.

[문제 3-1]
[채점기준] 총 8점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

키르히호프의 전압법칙을 적용하면

$$v_1 - v_2 = L\Delta x \frac{dj_1}{dt}$$

$$V(x)e^{i\omega t} - V(x+\Delta x)e^{i\omega t} = L\Delta x J(x) i\omega e^{i\omega t}$$

(1) [두 식 중 하나만 써도 4점]가 되고,

키르히호프의 전류법칙을 적용하면

$$j_1 = C\Delta x \frac{dv_2}{dt} + j_3$$

$$J(x)e^{i\omega t} = J(x+\Delta x)e^{i\omega t} + j_3$$

또는 $J(x)e^{i\omega t} = C\Delta x\, V(x+\Delta x) i\omega e^{i\omega t} + j_3$

(2) [세 식 중 하나만 써도 4점]가 된다.

[문제 3-2]
[채점기준] 총 16점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.
식(1)을 $e^{i\omega t}$로 나누면,

$$V(x) - V(x+\Delta x) = L\Delta x J(x) i\omega$$

$$V(x+\Delta x) = V(x) - L\Delta x J(x) i\omega \qquad \text{(3) [2점]}$$

($L\Delta x J(x) i\omega$ 대신 $L\Delta x \frac{dj_1}{dt}$을 사용하면 1점)

식 (3)을 Δx로 나눈 후, $\Delta x \to 0$으로 하면,

$$\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -i\omega L J(x) \qquad \text{[2점]}$$

($L\Delta x J(x) i\omega$ 대신 $L\Delta x \frac{dj_1}{dt}$을 사용하면 1점)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-i\omega L J(x))$$

$$V'(x) = -i\omega L J(x) \qquad (4)\ [3점]$$

가 된다.

주어진 j2에서 $C\Delta x \frac{dv_2}{dt} = J(x+\Delta x)e^{i\omega t}$ 이므로

$$i\omega C\Delta x V(x+\Delta x)e^{i\omega t} = J(x+\Delta x)e^{i\omega t}$$

$$i\omega C\Delta x V(x+\Delta x) = J(x+\Delta x) \qquad [2점]$$

식(3)으로부터

$$J(x+\Delta x) - J(x) = i\omega C\Delta x V(x+\Delta x) + \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{i\omega L\Delta x} \qquad [2점]$$

양변을 Δx로 나누고 $\lim$을 취하면

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{J(x+\Delta x) - J(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[i\omega C V(x+\Delta x) + \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{i\omega L(\Delta x)^2}\right] \qquad [2점]$$

$$J'(x) = i\omega C V(x) + \frac{1}{i\omega L}\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{(\Delta x)^2}\right] \qquad (5)\ [1점]$$

$$= i\omega C V(x) + \frac{1}{i\omega L}\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{(V(x+\Delta x) - V(x))/\Delta x}{\Delta x}\right]$$

도함수가 존재하기 위하여서는 위 식의 오른쪽 두 번째 항이 유효한 값을 가져야 하므로 $V'(x) = 0$ 이 되어야 함. 그러므로 식(4)로부터 $J(x) = 0$ 이고 $J'(x) = 0$ 이 됨. [2점]

[문제 3-3]

[채점기준] 총 6점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

[문제 3-2]로부터 $V(x) = 0$ 이 되므로 $J'(x) = 0$ 및 $J''(x) = 0$ 이 됨. [3점]

마찬가지로 $V'(x) = 0$ 이므로 $V''(x) = 0$. [3점]