2020학년도 인하대학교 수시모집 논술 모의고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	극대, 극소, 정적분, 치환적분법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

(나) 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$이면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$$

이다.

(※) 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 좌표가 매개변수 t의 함수

$$x=2\cos^2 t, \quad y=\sin 2t$$

로 주어졌다. 점 $A(0,\overline{OP})$와 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 $B(k,0)$라 하고 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하자. (단, $0\le t<\frac{\pi}{2}$, O는 원점)

(1-1) G가 나타내는 곡선의 방정식을 구하시오. (10점)

(1-2) 삼각형 OAB의 넓이를 t에 관한 식으로 나타내고 점 O, G, P가 한 직선위에 있을 때 이 넓이가 최대가 됨을 보이시오. (10점)

(1-3) 매개변수 t로 좌표가 주어지는 두 점 P, G가 그리는 두 곡선과 점 O, G, P가 한 직선위에 있을 때의 직선 OP그리고 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

좌표평면 위를 움직이는 점의 시각 t에서의 위치를 이해하고 미분을 이용하여 이로부터 얻어진 삼각형의 최대넓이와 치환적분법을 이용하여 곡선과 직선들로 이루어진 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 했다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** ☐ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ■ 미적분Ⅰ ■ 미적분Ⅱ ☐ 기하와 벡터

관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분 I, II)
	(가)	성취기준 1	[미적 I]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	(나)	성취기준 2	[미적분 II]-라. 적분법-1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	(다)	성취기준 3	[미적분 II]-라. 적분법-2) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 I	김창동 외	(주)교학사	2017	122	(가)	
미적분 I	이강섭 외	(주)미래엔	2017	122	(가)	
미적분 II	이강섭 외	(주)미래엔	2017	157,167,168	(나)	
미적분 II	김창동 외	(주)교학사	2017	165,177	(나)	
미적분 II	우정호 외	동아출판	2016	184,207,208	(나)	
미적분 II	김원경 외	비상교육	2016	156	(다)	
미적분 II	정상권 외	(주)금성출판사	2016	191,192	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 : 해당없음

5. 문항 해설

(1-1) 점 A, B를 구하면 무게중심의 자취가 원의 일부임을 쉽게 파악할 수 있다.

(1-2) 삼각형 OAB를 매개변수 t로 나타내고 미분법과 제시문 (가)를 이용하여 삼각형의 최대가 되는 점 t_0를 구하고 t_0일 때, O, G, P가 한 직선상에 있게 됨을 보이면 된다.

(1-3) (1-2)에 의해 O, G, P가 한 직선상에 있을 때, 점 P와 G가 이루는 곡선과 두 직선으로 이루어진 영역의 넓이는 제시문 (나)와 (다)를 이용하여 구할 수 있다.

6. 채점 기준

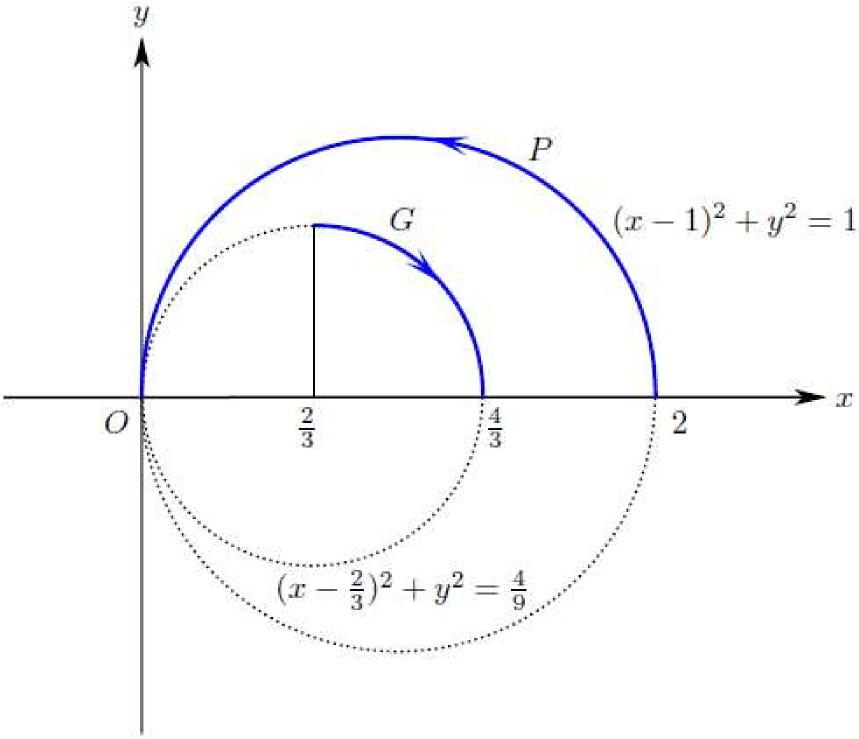
하위 문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	무게중심 $G\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sin t, \frac{2}{3}\cos t\right)$을 구하면 5점	5점
	$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$를 구하면 5점	5점
(1-2)	$S(t)=\frac{2\cos^3 t}{1-\sin t}$를 구하면 2점	2점
	점 O, G, P가 한 직선상에 있을 때 $t=\frac{\pi}{6}$의 값을 구하면 3점	3점
	$S'(t)$를 구하고 $t=\frac{\pi}{6}$에서 삼각형의 넓이가 최대가 됨을 보이면 5점	5점
(1-3)	$P=\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $G=\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$을 구하면 2점	2점
	$\int_{\frac{3}{2}}^{2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$을 구하면 3점	3점
	$\int_{1}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{4}{9}-(x-\frac{2}{3})^2}\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{4}{9}-u^2}\,du=\frac{4}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$를 구하면 3점	3점
	$A=\frac{5\pi}{54}+\frac{5\sqrt{3}}{36}$을 구하면 2점	2점

7. 예시 답안

(1-1) $y^2=(\sin 2t)^2=(2\sin t\cos t)^2=4(1-\cos^2 t)\cos^2 t=2x-x^2$ 이므로 주어진 매개변수로 나타낸 곡선은 $(x-1)^2+y^2=1\ \ (x>0, y\ \geq\ 0)$이다. 한편 $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=2\cos t$이고 P를 x축에 내린 수선의 발을 P'라고 하면 삼각형 OAB과 삼각형 $P'PB$는 닮음이므로 $k=\dfrac{2\cos^2 t}{1-\sin t}$ 이다.

즉, $A(0,2\cos t)$, $B\left(\dfrac{2\cos^2 t}{1-\sin t},0\right)=(2+2\sin t,0)$이므로 $G\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\sin t,\dfrac{2}{3}\cos t\right)$이다.

따라서, G가 나타내는 곡선의 방정식은 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\ \ \left(x\ \geq\ \dfrac{2}{3}, y>0\right)$이다.

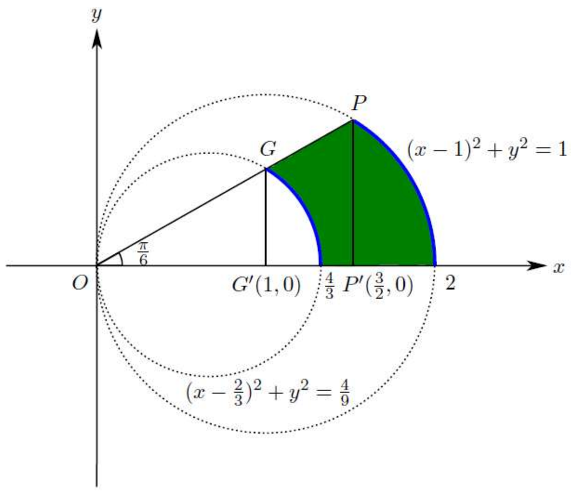


(1-2) 삼각형 OAB의 넓이 $S(t)=\dfrac{2\cos^3 t}{1-\sin t}$이고 $S'(t)=\dfrac{2\cos^2 t(1-2\sin t)}{1-\sin t}$이므로

제시문 (가)에 의해 $1-2\sin t=0,\ t=\dfrac{\pi}{6}$일 때 극대, 즉, 최대가 된다.

한편, 점 O, G, P가 한 직선위에 있을 때는 $\overrightarrow{OP}=<2\cos^2 t, 2\sin t\cos t>$, $\overrightarrow{OG}=<\dfrac{2\cos^2 t}{3(1-\sin t)},\dfrac{2}{3}\cos t>$가 평행이고, 이는 $1-\sin t=\sin t$ 즉, $t=\dfrac{\pi}{6}$일 때이다. 따라서, 점 O, G, P가 한 직선위에 있을 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 된다.

(1-3) (1-2)에 의해 $t=\dfrac{\pi}{6}$일 때, $P=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $G=\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고 구하는 영역은 아래 그림과 같이 두 원 $(x-1)^2+y^2=1$, $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$, x축 그리고 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$로 둘러싸인 영역 R이다.



제시문 (나)에 의해 $x-1=\sin\theta$로 치환하면

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}\sin\theta$로 치환하면

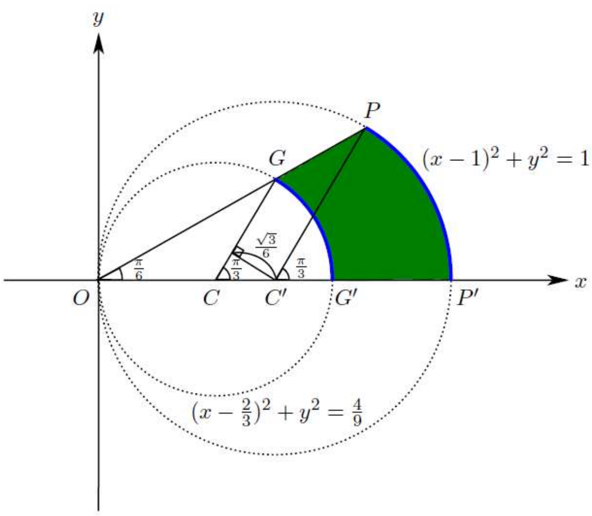
$$\int_{1}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\,dx=\frac{4}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

따라서, R의 넓이 A는

$$A=(\text{사다리꼴 } GG'P'P\text{의 넓이})+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-\int_{1}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{5\pi}{54}+\frac{5\sqrt{3}}{36}$$

(별해)



영역의 넓이 = 사다리꼴 $CC'PG$의 넓이 + 부채꼴 $PC'P'$의 넓이 − 부채꼴 GCG'의 넓이

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{6}\left(1+\frac{2}{3}\right)+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5\sqrt{3}}{36}+\frac{5\pi}{54}$$

2020학년도 인하대학교 수시모집 논술 모의고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	극한(값), 평균값 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [평균값 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x<x$이 항상 성립한다.

(다) 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$가 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$을 만족하고

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이면, $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이다.

(※) 자연수 n에 대하여 방정식 $\sin x=\frac{1}{x}$는 구간 $\left(2n\pi,\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에서 유일한 해 $x=a_n$을 갖는다.

(2-1) 모든 자연수 n에 대하여

$$2n\pi<a_{n+1}-2\pi<a_n$$

이 성립함을 보이시오. (10점)

(2-2) 각 자연수 n에 대하여

$$a_n-a_{n+1}+2\pi=\frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

을 만족하는 b_n이 $a_{n+1}-2\pi$와 a_n 사이에 존재함을 보이시오. (10점)

(2-3) $\lim_{n\to\infty} a_n\sin(a_{n+1}-a_n)=0$임을 보이시오. (15점)

3. 출제 의도

함수의 평균값 성질을 이용하여 두 그래프의 교점들이 갖는 성질을 밝혀내는 문항이다. 이를 위해서 삼각함수의 주기성을 이용하고 평균값 정리를 적절한 구간에서 잘 적용해야 하는 어려움이 있다. 삼각함수의 기본적인 성질을 이해하고 있는지를 평가하고, 또한 미분가능한 함수의 평균값 정리를 제대로 이해하고 적용할 수 있는지 평가한다. 마지막으로 평균값으로부터 유도된 결론을 수열의 극한의 성질과 잘 조합하여 주어진 수열의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
☐ 수학 I ☐ 수학 II ☐ 확률과 통계 ■ 미적분 I ☐ 미적분 II ☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="3">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분 I)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(가),
(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[미적 I]-가. 수열의 극한-1) 수열의 극한
미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[미적 I]-다. 다항함수의 미분-3) 도함수의 활용
미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	18,102	(가), (다)	
미적분 I	정상권 외	(주)금성출판사	2016	19,122	(가), (다)	
미적분 I	김창동 외	(주)교학사	2017	20,116	(가), (다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 : 해당없음

5. 문항 해설

(2-1) 주어진 방정식을 이용하여 교점의 x 좌표 사이의 간격을 알아낸다.
(2-2) (2-1)에서 얻은 결과로부터 구간 $(a_{n+1}-2\pi, a_n)$은 의미가 있다. 여기서 평균값 정리를 활용하여 식을 얻어내고 삼각함수의 주기성을 이용하여 변형하면 문제에서 원하는 결론을 얻을 수 있다.
(2-3) (2-2)에서 얻은 결과를 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는 식을 얻는다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	$2n\pi < a_{n+1} - 2\pi$ 임을 이해함	3점
	주어진 식으로부터 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$ 을 얻어냄	7점
(2-2)	$a_{n+1} - 2\pi$와 a_n 사이에서 평균값 정리를 적용하였음	6점
	평균값 정리로부터 원하는 형태로 식을 얻음	4점
(2-3)	제시문(가)를 이용하여 $\sin(a_n - (a_{n+1} - 2\pi)) < a_n - a_{n+1} + 2\pi$을 보임	5점
	(2-1)의 식에서 $1 - \frac{2\pi}{a_{n+1}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$임을 보임	4점
	(2-2)에서 $\sin(a_n - a_{n+1}) < \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$를 얻음	3점
	$a_n - a_{n+1} + 2\pi$에 관한 식과 수열의 극한의 성질로부터 주어진 극한을 구함	3점

7. 예시 답안

(2-1) $a_{n+1} > 2(n+1)\pi$ 이므로 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi$이다. 그리고

$$\begin{aligned}\sin(a_{n+1} - 2\pi) - \sin a_n &= \sin a_{n+1} - \sin a_n \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} < 0\end{aligned}$$

이므로 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$이다.

(2-2) 구간 $[a_{n+1} - 2\pi,\ a_n]$에서 함수 $f(x) = \sin x$에 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{a_n - a_{n+1} + 2\pi} = \cos b_n$$

인 b_n이 $a_{n+1} - 2\pi$와 a_n 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{\cos b_n} = \frac{\sin a_n - \sin a_{n+1}}{\cos b_n} = \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$ 을 얻는다.

(2-3) $0 < a_n - (a_{n+1} - 2\pi) < \frac{\pi}{2}$이므로 제시문 (나)에 의하여

$\sin(a_n - (a_{n+1} - 2\pi)) < a_n - a_{n+1} + 2\pi$ 을 얻는다. (2-1)과 (2-2)의 결과를 이용하면

$\sin(a_n - a_{n+1}) < \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ 이고 $1 - \frac{2\pi}{a_{n+1}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ 임을 알 수 있다.

$\lim_{n\to\infty} \cos b_n = 1$이므로 $0 < a_n \sin(a_n - a_{n+1}) < \dfrac{1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n} = 0$ 이다.

따라서, 제시문 (다)에 의해 $\lim_{n\to\infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$을 얻는다.

2020학년도 인하대학교 수시모집 논술 모의고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	쌍곡선(초점, 점근선), 음함수, 이차곡선	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 초점 $F(c,0), F'(-c,0)$으로부터 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이다. (단, $c>a>0, b^2=c^2-a^2$)

(나) 곡선 $f(x,y)=0$ 위의 점 (x_1,y_1)에서의 접선의 기울기는 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 $x=x_1, y=y_1$을 대입하여 구할 수 있다. 예를 들어 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1,y_1)에서의 접선의 기울기는 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$ 즉 $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$이므로 $x=x_1, y=y_1$을 대입하면 $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이다.

(다) 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 y에 대하여 풀면 $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$이다. 이때 $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 쌍곡선은 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$와 $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선이라 한다.

(3-1) 원 $x^2+(y-c)^2=r^2$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 한 점에서 공통의 접선을 가질 때, 원의 반지름 r을 a,b,c의 식으로 나타내시오.

(3-2) 두 점 $F(5,0), F'(-5,0)$과 중심이 $(0,5)$인 원 C에 대하여, 점 X가 원 C위를 움직일 때 $\overline{F'X}-\overline{FX}$의 최댓값이 8이라 한다. 이때 원 C의 반지름을 구하시오.

(3-3) 두 점 $F(5\sqrt{2},0), F'(-5\sqrt{2},0)$과 $\alpha>4$에 대하여 $f(\alpha)$는 다음 조건을 만족하는 양의 실수이다.

(조건) 중심이 $(\alpha, f(\alpha))$인 원 C 중에서 $\overline{F'X}-\overline{FX}(X\in C)$의 최댓값과 최솟값이 각각 $14, 10$이 되도록 하는 C가 존재한다. 이때, 극한값 $\lim_{\alpha\to\infty}\frac{f(\alpha)}{\alpha}$을 구하시오.

3. 출제 의도

쌍곡선의 정의와 식, 곡선에서의 접선의 의미를 활용해서 문제를 해결하는 능력을 시험하는 문항이다. 문항에서 제시되는 조건이 다소 생소할 수 있지만, 이를 독해하는 능력과 쌍곡선의 정의 또는 성질과 관련지어서 익숙한 상황으로 바꾸어서 생각할 수 있는 사고 능력을 평가하고자 한다. 첫 번째 소문항은 식이 주어졌을 때 음함수의 미분법을 이용한 단순 계산문제이지만 두 번째 소문항의 조건을 해석해 내었을 때 얻어지는 구체적인 상황이다. 이러한 조건을 해석해 내는 사고를 연습시키는 첫 두 소문항은 마지막 소문항을 해석해 내는 데에 결정적인 도움을 주도록 설계된 것이다. 마지막 소문항은 좀 더 복잡한 상황에서 쌍곡선의 점근선의 성질을 활용한 문제해결능력을 시험하는 문제이다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** ☐ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ■ 기하와 벡터		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
	(가), (나), (다)	성취기준 1	[기하와 벡터]-가. 평면 곡선-1) 이차곡선 기벡1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준 2	[기하와 벡터]-가. 평면 곡선-2) 평면 곡선의 접선 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고 쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2015	23	(가)	
기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2015	38	(나)	O
기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2016	26,29,41	(가), (다)	
기하와 벡터	김창동 외	(주)교학사	2017	24, 28	(가), (다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 : 해당없음

5. 문항 해설

(3-1) 제시문 (나)의 음함수의 미분법을 이용해서 원의 기울기와 쌍곡선의 기울기를 한 점에서 그 점의 x,y좌표의 식으로 나타낸 뒤 두 기울기가 같음을 이용해서 x,y좌표를 각각 a,b,c의 식으로 나타낼 수 있다. 반지름 r은 그 점과 원의 중심 $(0,c)$와의 거리이다.

(3-2) 이 문제는 제시문 (가)의 쌍곡선의 정의를 이해할 수 있다면 (3-1)에서 한 계산을 활용하면 된다. $\overline{F'X}-\overline{FX}$의 값이 주어진 양수 8인 점 X의 자취는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$의 $x>0$인 부분이다. $\overline{F'X}-\overline{FX}$ $(X\in C)$의 최댓값이 8보다 작다면 원과 쌍곡선은 만나지 않는 경우이고, 최댓값이 8이라면 원과 쌍곡선이 만나는 점에서 공통의 접선을 갖는 경우이다.

(3-3) 제시문 (나)에서 주어진 쌍곡선의 접선의 기울기와 제시문 (다)에서 주어진 쌍곡선의 점근선의 성질을 종합해 보면, x,y의 값이 한없이 커지면 접선의 기울기는 한 점근선의 기울기 $\dfrac{b}{a}$와 한없이 가까워진다는 사실을 알 수 있다. 이 사실과 (3-2)에서와 비슷한 조건을 공통접선으로 해석하여 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	원의 접선의 기울기를 점의 좌표와 c의 식으로 나타내면 2점	2점
	원의 접선의 기울기와 쌍곡선의 접선의 기울기를 등식으로 쓰면 3점	3점
	이를 이용해서 원의 반지름을 a,b,c의 식으로 표현하면 5점	5점
(3-2)	문항을 해석해서 (3-1)의 상황임을 언급하면 5점	5점
	실제로 원의 반지름을 구하면 5점	5점
(3-3)	문항을 해석해서 두 쌍곡선과 접하는 상황임을 언급하면 5점	5점
	$(\alpha, f(\alpha))$가 두 접선이 이루는 각의 이등분선 위에 있음을 알아내면 3점	3점
	탄젠트의 덧셈정리, 배각공식 등을 이용해서 실제로 극한값을 계산하면 7점	7점

7. 예시 답안

(3-1) 교점 (x,y)에서 원의 기울기 $-\dfrac{x}{y-c}$와 쌍곡선의 기울기 $\dfrac{b^2x}{a^2y}$가 같으므로,

$-\dfrac{x}{y-c}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$에서, $y=\dfrac{b^2c}{a^2+b^2}$이고, $x^2=a^2\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)=a^2+\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}$이다.

따라서, $r=\sqrt{x^2+(y-c)^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}+\left(\dfrac{-a^2c}{a^2+b^2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{c^2a^2}{a^2+b^2}}=a\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}}$ 이다.

(3-2) (3-1)에서 $a=4, b=3, c=5$인 경우이다. 이때, $r=4\sqrt{2}$ 이다.

(3-3) 중심이 $(\alpha, f(\alpha))$이고 문제의 성질을 만족하는 원 C는 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{7^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$, $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$와 각각 접한다. 접하는 점을 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$라고 하고, 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 하자. 이때, 원 C는 두 접선에 외접하므로 중심 $(\alpha, f(\alpha))$는 두 접선이 이루는 각의 이등분선 위에 있다.

그러면, $\alpha \to \infty$일 때, 제시문 (나)와 (다)에 의해 $m_1 \to \frac{1}{7}, m_2 \to 1$이고, $m = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha}$, $\tan\theta_1 = \frac{1}{7}$, $\tan\theta_2 = 1$라고 하면, $m = \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$이므로 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\frac{1}{7} + 1}{1 - \frac{1}{7} \cdot 1} = \frac{4}{3} = \frac{2m}{1 - m^2}$.

따라서 $m = \frac{1}{2}$이다.