□ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열 □

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	벡터, 벡터의 크기, 실수배, 평면벡터, 위치벡터, 내적	
예상 소요 시간	(30) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같다.

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

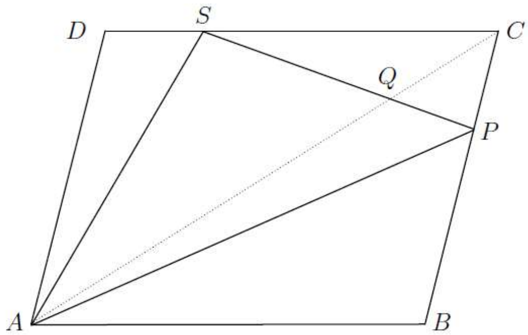
(나) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0 \le \theta \le \pi)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(다) 세 평면 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$와 실수 k에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},\quad (k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(※) 평행사변형 $ABCD$에 대하여 선분 BC 위의 점을 P, 선분 CD를 $3:1$로 내분한 점을 S, 선분 PS가 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하고 $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$라고 하자.



(1-1) Q가 선분 PS를 $m:n$으로 내분하는 점일 때, $\overrightarrow{AP}$를 m, n, $\vec{b}$, $\vec{d}$로 나타내시오. (8점)

(1-2) $|\vec{b}|=2$, $|\vec{d}|=\frac{3}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{3}{5}$이고 점 R은 $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RP}+2\overrightarrow{RS}=\vec{0}$을 만족하는 삼각형 APS의 내부점이라 하자.

(a) $\angle ASP=\frac{\pi}{2}$일 때, $\overrightarrow{AP}$를 $\vec{b}$와 $\vec{d}$로 나타내시오. (10점)

(b) $\angle ASP=\frac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 RPS의 넓이를 구하시오. (12점)

3. 출제 의도

평면벡터의 연산과 그 연산의 기하학적 개념을 주어진 조건에 적용할 수 있는 지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">□ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
□ 수학 I □ 수학 II □ 확률과 통계 □ 미적분 I □ 미적분 II ■ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (기하와 벡터)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(가), (나), (다)</td><td>성취기준 1</td><td>나. 평면벡터 1)벡터의 연산
기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>나. 평면벡터 2)평면벡터의 성분과 내적
기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>성취기준3</td><td>나. 평면벡터 2)평면벡터의 성분과 내적
기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	68,74,79	(가), (나), (다)	
기하와 벡터	김창동 외	(주)교학사	2017	73,80,83	(가), (나), (다)	
기하와 벡터	이강섭 외	(주)미래엔	2017	78,87,89	(가), (나), (다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당없음

5. 문항 해설

(1-1) 제시문 (가)로부터 $\overrightarrow{AS}$와 $\overrightarrow{AP}$의 위치벡터를 구하고 $\overrightarrow{AQ}$가 $\overrightarrow{AC}$와 평행이라는 사실로부터 $\overrightarrow{AP}$를 m, n, $\vec{b}$, $\vec{d}$로 나타낼 수 있다.

(1-2)(a) 삼각형 APS가 $\angle ASP = \frac{\pi}{2}$이므로 제시문 (나), (다)의 성질을 이용하여 t의 값을 구하면 $\overrightarrow{AP}$를 $\vec{b}$, $\vec{d}$로 나타낼 수 있다.

(1-2)(b) (1-1)의 결과로부터 Q가 선분 PS를 $2:3$으로 내분한 점임을 알 수 있고 $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RP}+2\overrightarrow{RS}=\vec{0}$를 이용하여 $\overrightarrow{AR}:\overrightarrow{RQ}=5:2$라는 사실로 부터 삼각형 RPS의 넓이를 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
오후 (1-1)	$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}$ 와 $\overrightarrow{AP}=\vec{b}+t\vec{d}$ $(0\le t\le 1)$로 나타내면	2점
	$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\frac{m}{4}+n}{m+n}\vec{b}+\dfrac{m+tn}{m+n}\vec{d}$ 를 구하면	2점
	$t=1-\frac{3m}{4n}$를 구하고 $\overrightarrow{AP}=\vec{b}+(1-\frac{3m}{4n})\vec{d}$ 로 나타내면	4점
오후 (1-2)(a)	$\overrightarrow{SP}=\frac{3}{4}\vec{b}-t\vec{d}$ $(0\le t\le 1)$로 나타내면	3점
	$0=\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{SP}=\frac{3}{16}\lvert\vec{b}\rvert^2-\frac{1}{4}t\vec{b}\cdot\vec{d}+\frac{3}{4}\vec{b}\cdot\vec{d}-t\lvert\vec{d}\rvert^2$을 이용하여 $t=\frac{1}{2}$를 구하면	5점
	$\overrightarrow{AP}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$로 나타내면	2점
오후 (1-2)(b)	Q가 선분 PS를 $m:n=2:3$으로 내분한 점임을 구하고 $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RP}+2\overrightarrow{RS}=\vec{0}$를 이용하여 A, R, Q가 한 직선상에 있고 $\overline{AR}:\overline{RQ}=5:2$임을 구하면 (또는 AS의 중점을 M이라 하고 $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RP}+2\overrightarrow{RS}=\vec{0}$를 이용하여 R이 MP를 $3:4$로 내분하는 점임을 보이거나 $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RP}+2\overrightarrow{RS}=\vec{0}$를 적절히 변형하여 R의 위치를 정확히 구하면) $\triangle RPS=\frac{2}{7}\triangle APS$ 또는 $\triangle RPS=\frac{4}{7}\triangle MPS$을 보이면 (단, 설명없이 $\triangle RAP:\triangle RAS:\triangle RPS=2:3:2$임을 언급만 하고 $\triangle RPS=\frac{2}{7}\triangle APS$를 언급한 학생 감점)	6점
	$\triangle RPS=\frac{3\sqrt{6}}{20}$를 구하면	6점

7. 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)에 의해

$$\overrightarrow{AS}=\frac{3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\vec{d}+\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d} \text{ 이다.}$$

$\overrightarrow{AP}=\vec{b}+t\vec{d}$ $(0\le t\le 1)$라 하면, 제시문 (가)에 의해

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{m\overrightarrow{AS}+n\overrightarrow{AP}}{m+n}=\frac{m}{m+n}(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d})+\frac{n}{m+n}(\vec{b}+t\vec{d})=\frac{\frac{m}{4}+n}{m+n}\vec{b}+\frac{m+tn}{m+n}\vec{d} \text{ 이다.}$$

$\overrightarrow{AQ}$가 $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$와 평행이므로 $t=1-\frac{3m}{4n}$이고 $\overrightarrow{AP}=\vec{b}+(1-\frac{3m}{4n})\vec{d}$이다.

(1-2) (a) $\overrightarrow{SP} = \frac{3}{4}\vec{b} - t\vec{d}$, $(0 \le t \le 1)$이라 하면 제시문 (나), (다)에 의해서

$$0 = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SP} = (\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\frac{3}{4}\vec{b} - t\vec{d}) = \frac{3}{16}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{4}t\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{d} - t|\vec{d}|^2$$

를 만족해야 하므로 $t = \frac{1}{2}$를 얻는다. 따라서, $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ 이다.

(b) $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ 이므로 (1-1)에 의해 Q는 선분 PS를 $m:n = 2:3$으로 내분하는 점이다.

제시문 (가)에 의해 $\overrightarrow{RQ} = \frac{2\overrightarrow{RS} + 3\overrightarrow{RP}}{2+3} = \frac{2}{5}\overrightarrow{RS} + \frac{3}{5}\overrightarrow{RP}$ 이고 $2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RP} + 2\overrightarrow{RS} = \vec{0}$ 이므로 $5\overrightarrow{RQ} = 2\overrightarrow{AR}$이다. 즉, 점 A, R, Q는 한 직선상에 있고 $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RQ} = 5:2$이므로 $\triangle RAP : \triangle RAS : \triangle RPS = 2:3:2$이다. 한편, $\triangle APS = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AS}||\overrightarrow{SP}|$이므로

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AS} = (\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 = \frac{14}{5}$$

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SP} = (\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}) \cdot (\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}) = \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 - \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{1}{4}|\vec{d}|^2 = \frac{189}{80}$$

로부터 $\triangle APS = \frac{21\sqrt{6}}{40}$이다. 따라서 삼각형 RPS의 넓이는 $\frac{2}{7}\triangle APS = \frac{3\sqrt{6}}{20}$이다.

(별해)

$2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RP} + 2\overrightarrow{RS} = \vec{0}$로부터 $\frac{\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RS}}{1+1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR}$ 를 얻는다. $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$이고 선분 AS의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{RM} = \frac{\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RS}}{2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR}$ 이므로 R은 선분 MP를 $3:4$로 내분하는 점이고 $\triangle RPS = \frac{4}{7}\triangle MPS$이다. $\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{b}||\vec{d}|\cos\theta = \frac{3}{5}$로부터 $\cos\theta = \frac{1}{5}, \sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$이므로 점 S로부터 선분 MP에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{SH} = \frac{3\sqrt{6}}{10}$이다. 따라서, $\triangle RPS = \frac{4}{7}\triangle MPS = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{3\sqrt{6}}{10} = \frac{3\sqrt{6}}{20}$이다.

□ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열 □

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	정적분, 함수의 오목, 볼록	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) (정적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

가 성립한다.

(나) (곡선의 볼록) 함수 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 이계도함수를 갖고 $f'' > 0$이면 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하다.

(※) 실수 t에 대하여, 곡선 $y=x(x-t)e^{x^3}$과 직선 $x=0$, $x=2$, x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

(2-1) 함수 $S(t)$는 구간 $[2,\infty)$에서 증가함을 보이시오.

(2-2) $S'(0) < -\dfrac{2e^8}{25}$임을 보이시오.

(2-3) $S(t)$가 $t=a$에서 최솟값을 가지면, $a > \dfrac{3}{2}$임을 보이시오.

3. 출제 의도

정적분과 미분의 관계를 이용하여 적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다.
함수의 오목, 볼록을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목 □ 수학 Ⅰ □ 수학 Ⅱ □ 확률과 통계 ■ 미적분 Ⅰ ■ 미적분 Ⅱ □ 기하와 벡터

<table>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분 Ⅰ)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분 Ⅱ)</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분I	이준열 외	천재교육	2019	188-194	(가)	
미적분I	김원경 외	비상교육	2017	145-148	(가)	
미적분II	황선욱 외	좋은책신사고	2018	115-120	(나)	
미적분II	김창동 외	(주)교학사	2017	133-142	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당없음

5. 문항 해설

(2-1) 문항은 주어진 영역의 넓이를 적분을 이용하여 나타내고 이 식의 성질을 알아낼 수 있는지를 묻는다.

(2-2) 문항은 함수의 그래프가 아래로 볼록함을 이용하여 적분으로 주어진 값을 한정할 수 있는지도 평가한다.

(2-3) 문항은 정적분과 미분의 관계를 이용하여 적분 형태로 주어진 함수를 미분하여 함수의 성질을 판단할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	$S(t)$를 적분 형태로 표현하면	2
	$S(t)$가 $t \geq 2$일 때 증가함을 보이면	3
(2-2)	$S'(0)$를 적분 형태로 표현하면	5
	$xe^{x^3} \geq 2e^8 + 25e^8(x-2)$임을 보이면	5
	$S'(0) < -\dfrac{2e^8}{25}$임을 보이면	5
(2-3)	$S'(t)$를 적분 형태로 표현하면	6
	$S'(3/2) < 0$임을 보이면	7
	$a > 3/2$임을 보이면	2

7. 예시 답안

(2-1) 정의에 의하여 $S(t) = \int_0^2 |x-t| xe^{x^3} dx$이다. $t \geq 2$이면

$$S(t) = \int_0^2 (t-x) xe^{x^3} dx = t\int_0^2 xe^{x^3} dx - \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx$$

이므로, $S(t)$는 증가한다.

(2-2) 마찬가지로 $t < 0$일 때,

$$S(t) = \int_0^2 (x-t) xe^{x^3} dx = \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx - t\int_0^2 xe^{x^3} dx$$

이므로 $S'(0) = -\int_0^2 xe^{x^3} dx$이다. $y = xe^{x^3}$는

$$y' = (1+3x^3)e^{x^3},\ y'' = (12x^2+9x^5)e^{x^3}$$

이므로, $x > 0$일 때 곡선 $y = xe^{x^3}$는 아래로 볼록하다. 곡선 $y = xe^{x^3}$의 $x = 2$에서 접선을 구해보면 $y - 2e^8 = 25e^8(x-2)$이다. 곡선이 아래로 볼록하므로

$$\int_0^2 xe^{x^3} dx = \int_0^{\frac{48}{25}} xe^{x^3} dx + \int_{\frac{48}{25}}^2 xe^{x^3} dx > \int_{\frac{48}{25}}^2 [25e^8(x-2) + 2e^8] dx = \frac{2e^8}{25}$$

이다. 따라서 $S'(0) < -\dfrac{2e^8}{25}$이다.

(2-3) $0 < t < 2$일 때, $S(t) = \int_0^2 |x-t| xe^{x^3} dx = \int_0^t (t-x) xe^{x^3} dx + \int_t^2 (x-t) xe^{x^3} dx$이므로

$S'(t) = \int_0^t xe^{x^3} dx - \int_t^2 xe^{x^3} dx$이고 $S''(t) = 2te^{t^3} > 0$이다. (2-2)의 결과를 이용하면

$$S'\left(\frac{3}{2}\right)=\int_{0}^{3/2} xe^{x^3}dx-\int_{3/2}^{2} xe^{x^3}dx<\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}e^{\frac{27}{8}}-\frac{2}{25}e^{8}<\frac{9}{4}e^{4}-\frac{2}{25}e^{8}<0$$

이므로 $0<t<\frac{3}{2}$일 때 $S'(t)<0$이다. 또한 $t\le 0$일 때 $S(t)=\int_{0}^{2} x^2e^{x^3}dx-t\int_{0}^{2} xe^{x^3}dx$이므로, $t<\frac{3}{2}$일 때, $S(t)$는 감소한다. 따라서, $S(t)$는 $t=a>\frac{3}{2}$에서 최솟값을 갖는다.

□ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열 □

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	역함수의 미분법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) 4차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ (a,b,c,d는 상수)이 서로 다른 4개의 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$를 가지면, 등식

$$\begin{aligned} & x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) \\ & =x^4-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)x^2 \\ & \quad -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \end{aligned}$$

가 성립하므로, 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-a, \qquad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=b$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-c, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=d$$

(나) 4차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$이 서로 다른 4개의 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ($\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$)를 갖고, 계수 a,b,c의 값과 $\alpha_1+\alpha_2$의 값이 정해지면, 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$의 값이 모두 결정된다. 문제 (3-1)은 이 사실의 예시이다.

(다) (역함수의 미분법) 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하고, 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$이다.

(3-1) 4차방정식 $x^4-5x^3+\dfrac{27}{4}x^2-\dfrac{1}{4}x+k=0$이 서로 다른 4개의 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ($\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$)를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2=\dfrac{1}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(3-2) 4차함수 $h(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$에 대하여 t가 $-1<t<\dfrac{1}{2}$를 만족할 때, x에 대한 방정식 $h(x)=t$의 네 실근 중에 가장 큰 값을 $r(t)$라고 하면, $r(t)$는 미분가능한 함수이다. 제시문 (다)를 이용하여 $r'(0)$의 값을 구하시오.

(3-3) $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 모든 계수가 양수인 4차함수이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$는 $p<t<q$일 때 서로 다른 4개의 실근 x_1, x_2, x_3, x_4를 갖는다. (단, p, q는 $p<1, q>181$인 상수이고, x_1, x_2, x_3, x_4는 구간 (p, q)에서 t에 대하여 미분가능하다.) 이때, $g(t)=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$는 다음 세 조건을 만족한다.

(1) $g(t)$는 $t=1$에서 미분가능하지 않다.

(2) $p<t\leq 1$일 때 $g(t)=18$이다.

(3) $g(181)=20,\ g'(181)=\dfrac{1}{154}$이다.

이때, $f(x)$의 식을 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 제시문에서 주어진 내용을 이해하고 문제에 활용해서 대수적인 식의 계산을 할 수 있는지, 연속함수의 미분가능성을 이해하고 있는지, 그리고 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

미분가능성을 이해하고 있는지의 평가는 관련문제에서 수학능력시험 등에서 많이 다루어지는 소재인 절댓값함수를 활용하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목 ■ 수학 I ☐ 수학 II ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분 I ■ 미적분 II ☐ 기하와 벡터

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학 I)
(가)	성취기준1	수학1111. 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: (수학 I)
(나)	성취기준1	수학1232-2. 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분 II)
(다)	성취기준1	미적2313. 역함수를 미분할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅰ	황선욱 외	좋은책신사고	2016	12-14	(가), (나)	○
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2016	12-14	(가), (나)	○
미적분Ⅱ	김창동 외	교학사	2017	121-123	(다)	
미적분Ⅱ	신항균 외	지학사	2017	114-116	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당없음

5. 문항 해설

(3-1) 제시문 (가)에서 주어진 4차방정식의 근과 계수와의 관계를 주어진 상황에 활용하여 상수항을 찾아낸다. 제시문 (가)는 교과서에는 없지만 식을 전개해서 쉽게 얻어지는 관계식이다. 이 문항은 제시문 (나)의 예시이기도 하다. 제시문 (나)는 문항 (3-3)을 해결하는데 쓰이지만 실제로 증명하려면 계산이 길기 때문에 결과만이 서술되어 있는데, 학생들은 문항 (3-1)을 풀면서 제시문 (나)의 결과가 어떻게 일반적으로 증명될 수 있는지 증명의 아이디어를 얻을 수 있다.

(3-2) 역함수의 미분법을 이용해서 미분계수를 구할 수 있다. 이 계산은 실제로 (3-3) 문제에서 조건 (3)을 이용해서 계산을 하는 방법을 알려주는 힌트문제이기도 하다.

(3-3) 미분가능하지 않다는 사실의 의미를 파악하면 상수항을 구할 수 있으며, 제시문 (가)와 (나) 및 조건 (2)를 이용해서 x^3의 계수를 찾아내는 것은 수학문제해결력을 요구한다. 마지막으로 조건 (3)과 역함수의 미분법을 이용해서 다항함수의 식을 완성한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	근과 계수와의 관계를 이용해서 $9\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4=\frac{1}{2}$임을 찾아냄	3점
	k의 값을 구함. (위 방법이 아니더라도 k의 값을 구해내면 점수 부여)	2점
(3-2)	r과 h가 역함수 관계임을 알아내고 $r(0)=1$임을 인지함	5점
	$r'(0)$의 값을 정확히 구함. (역함수의 미분법을 사용하지 않은 경우에는 감점)	5점
(3-3)	조건 (1)로부터 $f(0)=1$임을 찾아냄	5점
	조건 (2)로부터 $t=1$일 때 $x_4=0$임을 알아내고, x^3의 계수를 찾아냄 (단, 제시문 (나)를 언급하지 않으면 감점)	8점
	조건 (3)을 이용해서 x^2과 x의 계수를 찾아냄	7점

7. 예시 답안

(3-1) $\alpha_1+\alpha_2=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_3+\alpha_4=\frac{9}{2}$이다.

$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)+\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4=\frac{27}{4}$이므로, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4=\frac{9}{2}$.

$\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)+\alpha_3\alpha_4(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{1}{4}$이므로, $9\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4=\frac{1}{2}$.

두 식을 연립하여 풀면, $\alpha_1\alpha_2=-\frac{1}{2}$, $\alpha_3\alpha_4=5$이므로, $k=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-\frac{5}{2}$이다.

(실제로 네 근은 $-\frac{1}{2},1,2,\frac{5}{2}$이다.)

(3-2) $r(0)=1$이고 $h'(1)=(1+1)(1+2)(1+3)=24$이므로,

$r'(0)=\frac{1}{h'(1)}=\frac{1}{24}$이다.

(3-3) 편의상 $f(x)-t=0$의 네 근을 크기 순서대로 $x_1<x_2<x_3<x_4$라고 하자.
$g(t)$는 $t=1$에서 미분가능하지 않으므로 $f(x)=1$의 실근 중 하나는 0이고 따라서 $f(0)=1$이다.
이제, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$이라고 하자. (단, a,b,c는 상수) 4차함수의 그래프의 개형으로부터
$t=1$일 때 $x_1=0$이었다면 $p<t\le 1$일 때 $x_1>0$이므로 $g(t)=x_1+x_2+x_3+x_4=-a$
$x_2=0$ 또는 $x_3=0$이었다면 $p<t\le 1$일 때 $g(t)=-x_1-x_2+x_3+x_4=-a-2(x_1+x_2)$는 상수가 될 수 없다.
(제시문 (나)) $x_4=0$이었다면 $p<t\le 1$일 때 $g(t)=-x_1-x_2-x_3-x_4=a$.
문제에서 $a>0$이라 했으므로, $t=1$일 때 $x_4=0$이고 $a=18$이다.
$t>1$일 때 $x_3<0, x_4>0$이므로 $g(t)=-x_1-x_2-x_3+x_4=18+2x_4$이고, $t=181$일 때 $x_4=1$이다.
따라서 $f(1)=1+18+b+c+1=181$, $g'(181)=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{4+3a+2b+c}=\frac{2}{58+2b+c}=\frac{1}{154}$에서
$b+c=161, 2b+c=250$이므로, $b=89, c=72$. 이때 $f(x)=x^4+18x^3+89x^2+72x+1$.