□ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 – 자연계열 □

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 이차방정식의 근과 계수의 관계, 이차함수의 최댓값 최솟값	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (x_1,y_1)에서의 접선의 방정식은 $y=2x_1x-y_1$이다.

(나) 점 $P(x_1,y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(1-1) 좌표평면 위의 점 (a,b)를 지나고 포물선 $y=x^2$에 접하는 서로 다른 두 개의 접선이 존재하기 위한 필요충분조건을 a,b에 대한 부등식으로 나타내시오. (7점)

(1-2) 점 (a,b)를 지나고 포물선 $y=x^2$에 접하는 서로 다른 두 개의 접선이 존재한다.

(a) 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오. (8점)

(b) 점 (a,b)가 $y=-(x+2)^2$의 그래프 위에 있을 때, 점 (a,b)와 두 접점이 이루는 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

포물선에 직선이 접할 조건을 구할 수 있는지 평가한다. 두 점을 지나는 직선이 유일하게 결정됨을 이해하고 점과 직선의 거리 및 피타고라스 정리를 이용한 점과 점사이의 거리를 구할 수 있는 지를 평가한다. 이차함수의 최댓값, 최솟값을 구할 수 있는 지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목 ■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ■ 기하와 벡터
관련 성취기준	(see below)

관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
(가)	성취기준 1	기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅰ)
(나)	성취기준 1	수학1323. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	신항균 외	(주) 지학사	2017	41	(가)	
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	45	(가)	
수학 Ⅰ	김창동 외	(주) 교학사	2017	148	(나)	
수학 Ⅰ	신항균 외	(주) 지학사	2017	157	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 : 해당없음

5. 문항 해설

(1-1) 판별식을 이용하여 기울기가 m인 직선이 포물선에 접할 조건을 구할 수 있다. 서로 다른 기울기는 서로 다른 접선을 주게 된다는 점을 인지하면, 판별식을 이용하여 서로 다른 두 실근 m이 존재할 조건이 주어진 문제의 답이 됨을 알 수 있다.
(1-2) (a) 제시문 (가)와 함께, 두 점을 지나는 직선이 유일하게 결정됨을 이용하면 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.
(1-2) (b) 제시문 (나)를 이용하여 삼각형의 높이를 구하고, 포물선과 (a)의 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 근과 계수의 관계 및 피타고라스 정리를 이용하여 밑변의 길이를 구하면, 구하고자 하는 삼각형의 넓이를 a, b로 나타낼 수 있다. 주어진 조건과 함께 이차함수의 최솟값을 이용하면 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	판별식을 이용하여 접할 조건을 찾으면	3점
	판별식의 판별식을 이용하여 부등식 $a^2 > b$를 찾으면	4점
(1-2)(a)	제시문 (가)로부터 주어진 접점을 지나는 직선이 점 (a, b)를 지나야 함을 찾으면	3점
	두 점을 지나는 직선의 유일성을 이용해서 답을 찾으면	5점
(1-2)(b)	제시문 (가)를 이용하여 높이를 구하면	5점
	근과 계수의 관계 및 피타고라스 정리를 이용하여 높이를 구하면	5점
	이차함수의 최솟값을 이용해서 면적의 최솟값을 구하면	5점

7. 예시 답안

(1-1) 점 (a,b)를 지나고 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-a)+b$이다. 직선이 포물선과 접할 조건은 $x^2-mx+(ma-b)=0$이 중근을 가질 때이므로 $D=m^2-4ma+4b=0$. 서로 다른 접선이 존재한다는 것과 $D=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 것은 같은 말이므로 D의 판별식 $D_D=4a^2-4b>0$이다. 따라서 $a^2>b$가 필요충분조건이 된다.

(1-2)(a) (x_1,y_1)과 (x_2,y_2)를 두 접점이라 하자. 제시문 (가)에 의하면, 각 접점에서의 접선의 방정식은 $\frac{y+y_1}{2}=x_1x, \frac{y+y_2}{2}=x_2x$가 된다. 두 방정식이 (a,b)를 지나므로 (x_1,y_1)과 (x_2,y_2)이 모두 $\frac{y+b}{2}=ax$를 만족시킨다. 두 점을 지나는 직선이 유일하게 결정되므로 $\frac{y+b}{2}=ax$이 구하고자 하는 직선의 방정식이 된다.

(1-2)(b) 두 교점의 x좌표는 (a)의 방정식과 $y=x^2$의 연립방정식의 근이므로 $x^2-2ax+b=0$를 만족한다. 따라서 근과 계수의 관계에 의해서 $|x_1-x_2|=\sqrt{4a^2-4b}$가 되고, (a)의 직선의 기울기가 $2a$이므로 피타고라스 정리에 의해서 두 교점사이의 거리는 $\sqrt{4a^2-4b}\sqrt{1+4a^2}$이 된다. 제시문 (나)에 의해서, (a,b)에서 (a)의 직선까지의 거리는 $\frac{|2b-2a^2|}{\sqrt{1+4a^2}}$이므로 삼각형의 넓이는 $2(\sqrt{a^2-b})^3$이 된다. $b=-(a+2)^2$을 만족하므로 삼각형의 넓이의 최솟값은 $2(\sqrt{a^2+(a+2)^2})^3=2(\sqrt{2a^2+4a+2+2})^3 \geq 4\sqrt{2}$이 된다.

☐ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열 ☐

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 ☐ 오후
			☐ 1번 ■ 2번(의예1번) ☐ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	삼수선의 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) (삼수선의 정리) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \ell$이면 $\overline{PH} \perp \ell$

(2) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \ell$이면 $\overline{OH} \perp \ell$

(3) $\overline{PH} \perp \ell$, $\overline{OH} \perp \ell$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이면 $\overline{PO} \perp \alpha$

(나) 좌표공간의 사면체 $ABCD$의 네 꼭짓점 A,B,C,D를 모두 지나는 구를 사면체 $ABCD$에 외접하는 구라고 한다. 사면체 $ABCD$의 네 면과 접하는 구를 사면체 $ABCD$에 내접하는 구라고 한다. 사면체 $ABCD$의 내접하는 구의 중심을 I라고 하면, 점 I는 사면체 $ABCD$의 내부에 위치하고, I에서 사면체 $ABCD$의 네 면에 각각 내린 수선의 길이는 내접하는 구의 반지름과 같다.

(※) 좌표공간 위의 세 점 A, B, C와 평면 ABC 위에 있지 않은 점 D를 꼭짓점으로 갖는 사면체 $ABCD$에 내접하는 구의 중심을 I, 외접하는 구의 중심을 G라고 하자.

(2-1) A, B, C의 좌표가 각각 $(0,0,0)$, $(6,0,0)$, $(2,4,0)$일 때, G에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표를 구하시오.

(2-2) 사면체 $ABCD$에 내접하는 구의 반지름이 r이고 I에서 변 AB에 내린 수선의 길이가 k일 때, I에서 평면 ABC와 평면 ABD에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라고 하자. 선분 HH'의 길이를 k,r의 식으로 나타내시오.

(2-3) 사면체 $ABCD$의 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 하자. I와 G가 일치할 때, 변 AD, BD, CD의 길이를 각각 a, b, c의 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

이 문제는 사면체와 구의 내접, 외접이라는 소재를 활용해서 학생들의 공간도형을 지각하는 능력, 삼수선의 원리를 적용하는 능력 등을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목 ☐ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ■ 기하와 벡터		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
	(가)	성취기준 1	기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	(나)	성취기준1	기벡1324. 구의 방정식을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2017	151-154	(가)	
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2017	138-142	(가)	
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2017	179, 213	(나)	○
기하와 벡터	이강섭 외	미래엔	2016	189	(나)	○

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당없음

5. 문항 해설

(2-1) 수선의 발을 평면에 내리면 수선의 발을 지나는 모든 직선이 수선과 수직이라는 직선과 평면의 수직관계를 이용하여 수선의 발로부터 사면체의 한 면을 이루는 삼각형의 꼭짓점까지의 거리가 모두 같다는 사실을 파악한다. 중학교 기하학에서 배운 삼각형의 외심의 기본성질을 이용하거나 또는 다른 방법을 통해서 외심의 좌표를 구할 수 있다.

(2-2) 삼수선의 정리를 이해하고 있는지 평가하는 문제이다.

(2-3) 앞서 (2-1)과 (2-2) 문제로부터 내심(=외심)에서 사면체의 각 면에 수선의 발이 문제해결의 역할을 한다는 사실을 파악할수 있고, 수선의 발과 사면체의 꼭짓점을 이어서 모두 12개의 이등변 삼각형을 만들 수 있는데, 외접하는 구와 내접하는 구의 성질로부터 이 삼각형들은 모두 등변의 길이가 같다. 삼수선의 정리로부터 12개의 삼각형은 합동인 6쌍의 삼각형임을 알 수 있고, 각 등을 이용하여 실제로 이 12개의 삼각형은 4개씩 합동인 삼각형으로 묶인다는 사실을 알 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	수선의 발이 삼각형 ABC의 외심이라는 것을 파악하면	5점
	외심이 두 변의 수직이등분선의 교점이라는 것을 이용해서 또는 다른 방법으로 수선의 발의 좌표를 정확히 구하면	5점
(2-2)	네 점 I, H, H', P가 한 평면에 있다는 것을 찾아내면	5점
	$\overline{HH'}$을 계산하면	5점
(2-3)	내심(=외심)에서 4면에 내린 수선의 발과 각 꼭짓점으로 이루어진 12개의 이등변삼각형 중에서 4면체의 변을 공유하는 쌍들이 합동임을 삼수선의 정리로부터 알아내면	7점
	각 또는 다른 방법을 이용해서 $\overline{AD}=a, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$임을 알아내면	8점

7. 예시 답안

(2-1) G에서 평면ABC (즉 xy평면)에 내린 수선의 발을 H라고 하면,

$\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}$에서 $\overline{HA}=\overline{HB}=\overline{HC}=\sqrt{\overline{GA}^2-\overline{GH}^2}$이므로 H는 삼각형 ABC의 외심이다

점 H는 xy평면에서 두 변 AB와 AC의 수직이등분선 $y=3$과 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$의 교점이므로 좌표는 $(3,1,0)$이다.

(2-2) I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 P라고 하면, 삼수선의 정리에서 H와 H'에서 변 AB에 내린 수선의 발도 P이다. 또한 네 점 I, H, H', P는 BC에 수직이고 점 P를 지나는 평면위에 있다.

$\overline{IH}=\overline{IH'}=r$이고 $\overline{IP}=k$ 이고 두 직각삼각형 IHP와 $IH'P$는 합동 (RHS합동)이므로, $\overline{HH'}$의 길이는 직각삼각형 IHP의 꼭짓점 H에서 빗변 IP에 내린 수선의 길이 $\frac{r\sqrt{k^2-r^2}}{k}$ 의 2배이다.

$\overline{HH'}=\frac{2r\sqrt{k^2-r^2}}{k}$.

(2-3) $I(=G)$에서 네 면 ABC, BCD, CAD, ABD에 내린 수선의 발을 각각 H, J, K, L이라고 하자.

(2-1)과 (2-2)에서와 같은 논리에 의하여 6쌍의 이등변 삼각형 JBC와 HBC, KCA와 HCA, LAB와 HAB, KCD와 JCD, JBD와 LBD, LAD와 KAD는 서로 합동이다.

$\angle ALD=\angle AKD=\alpha$, $\angle BJD=\angle BLD=\beta$, $\angle CKD=\angle CJD=\gamma$라고 하면,

$\angle BHC=2\pi-\beta-\gamma$, $\angle CHA=2\pi-\gamma-\alpha$, $\angle AHB=2\pi-\alpha-\beta$이고, 세 각의 합은 2π이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$이다. 따라서 $\angle BHC=\alpha$, $\angle CHA=\beta$, $\angle AHB=\gamma$이고

삼각형 HBC와 LAD, 삼각형 HCA와 JBD, 삼각형 HAB와 KCD는 각각 합동이다.

따라서 $\overline{AD}=a, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$이다.

□ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열 □

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■오전 □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 3번(의예2번)
출제 범위	핵심개념 및 용어	사이값 정리, 합성함수의 미분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) (사이값 정리) 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c) = k \ \ (a < c < b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

(나) 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$의 합성함수 $f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(※) 상수 a $(a > 0)$와 함수 $f(x) = x^2(x+a)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 $g'(-1) > 0$이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(g(x)) = x^2(x+3)^2 e^x$$

을 만족한다.

(3-1) 함수 $y = x^2(x+3)^2 e^x$의 그래프의 개형을 그리시오. (단, 극대와 극소는 표시하되, 그래프의 오목과 볼록은 고려하지 않는다.)

(3-2) 상수 a의 값을 구하시오.

(3-3) $g(0)$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

합성함수의 미분법을 이용하여 합성함수의 미분을 계산할 수 있는지를 평가한다.
사이값 정리를 이용하여 연속함수의 성질을 조사할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
☐ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ■ 미적분Ⅰ ■ 미적분Ⅱ ☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분Ⅰ)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분Ⅱ)</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내 도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분I	이준열 외	천재교육	2018	83-87	(가)	
미적분I	김원경 외	비상교육	2017	66-70	(가)	
미적분II	황선욱 외	좋은책신사고	2018	100-104	(나)	
미적분II	김창동 외	(주)교학사	2017	116-120	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당없음

5. 문항 해설

(3-1) 문항은 지수함수의 미분을 계산할 수 있고, 함수의 도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그릴 수 있는지도 평가한다.

(3-2), (3-3) 문항은 함수의 합성에 관한 관계식으로 주어진 함수에 대한 성질을 관찰하는 문제로서, 합성함수의 미분법과 사이값 정리를 이용하여 함수의 성질을 잘 이끌어낼 수 있는지를 판단하고자 하는 문제이다.

6. 채점 기준

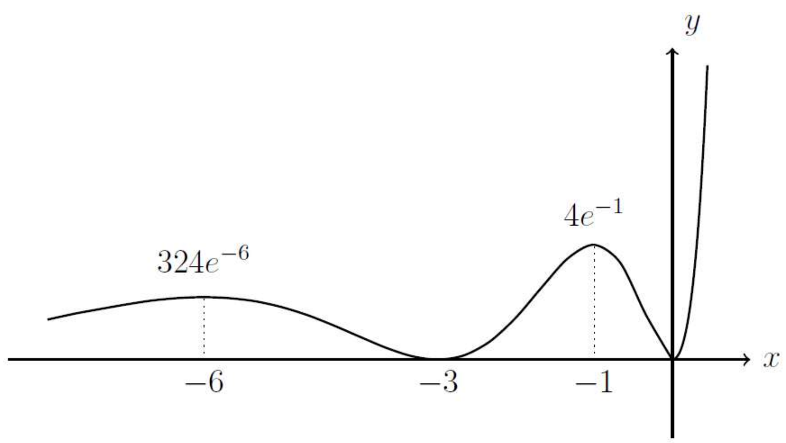
하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	- 주어진 함수를 미분하여 $y' = e^x x(x+1)(x+3)(x+6)$를 얻으면	2
	- 도함수를 이용하여 함수의 증감을 판단하고 그래프의 개형을 그리면	3
(3-2)	- 합성함수 미분법을 이용하여 $g(-1)=0$ 또는 $g(-1)=-\frac{2a}{3}$임을 얻으면	4
	- 함수의 성질로부터 $g(-1)\neq 0$임을 알고, $g(-1)=-\frac{2a}{3}$를 얻으면	5
	- $a=3e^{-1/3}$을 얻으면	6
(3-3)	- $g(0)=0$이거나 $g(0)=-a$임을 얻으면	2
	- x가 충분히 크면 $g(x)$가 양수임을 알아내면	5
	- 사이값 정리를 적용하여 $g(0)=0$을 얻으면	8

7. 예시 답안

(3-1) $y' = e^x x(x+1)(x+3)(x+6)$이므로, 함수의 증감은 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{324}{e^6}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 그래프의 개형은 다음과 같다.



(3-2) 합성함수 미분법에 의해 $f'(g(-1))g'(-1)=0$이고 $g'(-1)>0$이므로 $f'(g(-1))=0$이다. 또한 $f'(x)=x(3x+2a)$이므로, $g(-1)=0$이거나 $g(-1)=-\dfrac{2a}{3}$

이다. 하지만 $f(g(-1))=4e^{-1}$이므로 $g(-1)\neq 0$이다. 따라서 $g(-1)=-\dfrac{2a}{3}$이고

$\dfrac{4}{27}a^3=f(g(-1))=4e^{-1}$이므로 $a=3e^{-1/3}$이다.

(3-3) $e^a(a+3)^2>a$이므로

$$f(g(a))=e^a a^2(a+3)^2>a^3>\frac{4a^3}{27}$$

이다. 함수 f의 극댓값이 $\dfrac{4a^3}{27}$이므로 $g(a)$는 유일하게 결정되고, $g(a)>0$이다.
또한 $f(g(0))=0$이므로 $g(0)=0$이거나 $g(0)=-a$이다. 만약 $g(0)=-a<0$이면 사이값정리에 의해 $g(s)=0$인 s가 0과 a 사이에 존재한다. 그러면 $0=f(g(s))=e^s s^2(s+3)^2>0$이므로 모순이다. 따라서 $g(0)=0$이다.

<참고>

문제의 미분가능한 함수 g는 존재한다. 함수 f_1, f_2, f_3를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} f_1(x)&=x^2(x+3e^{-1/3}) \quad (x<-2e^{-1/3}) \\ f_2(x)&=x^2(x+3e^{-1/3}) \quad (-2e^{-1/3}\le x<0) \\ f_3(x)&=x^2(x+3e^{-1/3}) \quad (x\ge 0) \end{aligned}$$

함수 $h(x)=e^x x^2(x+3)^2$에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} f_1^{-1}(h(x)) & (x<-1) \\ f_2^{-1}(h(x)) & (-1\le x<0) \\ f_3^{-1}(h(x)) & (x\ge 0) \end{cases}$$

로 두면 함수 g는 문제의 조건을 만족한다.

□ 2020학년도 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열 □

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전-의예 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번(의예3번)
출제 범위	핵심개념 및 용어	산술-기하 평균, 수학적 귀납법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) 실수 x, y에 대하여 부등식 $(\frac{x+y}{2})^2 \geq xy$가 성립한다.

(나) 양의 실수 A, B와 자연수 n에 대하여 부등식 $A \leq B$가 성립할 필요충분조건은 $\sqrt[n]{A} \leq \sqrt[n]{B}$이다.

(다) (수학적 귀납법) 자연수 $n \geq 2$에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n \geq 2$에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=2$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$ $(k \geq 2)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, 명제 $n=k+1$일 때에도 $p(n)$이 성립한다.

(3-1) 양의 실수 a, b가 $ab \geq 1$을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(a^2+1)(b^2+1) \leq ((\frac{a+b}{2})^2+1)^2$$

(3-2) 양의 실수 a,b,c가 $ab,bc,ca \geq 1$을 만족할 때 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \leq (d^2+1)^3$$

단, $d=\frac{a+b+c}{3}$ 이다.

(3-3) 양의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$가 모든 $1 \leq i, j \leq n$에 대하여 $a_i a_j \geq 1$을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sqrt[n]{(a_1^2+1)(a_2^2+1) \cdots (a_n^2+1)} \leq (\frac{a_1+\cdots+a_n}{n})^2+1$$

3. 출제 의도

양수 x, y에 대한 산술평균과 기하평균에 관한 부등식 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$는 전개식 $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$로부터 얻어진다. 우리는 이 부등식을 올바로 이해하고 그것을 다른 부등식에 활용할 수 있는지 알아본다. 이차식의 대수적 조작과 이를 통한 부등식의 올바른 이해 정도와 활용 능력을 측정한다. 또한, 주어진 사실로부터 기본적인 수학적 귀납법을 활용하여 어떤 명제를 증명할 수 있는지 알아보고자 한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목
☐ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>
<table>
<tr><th>관련
제시문</th><th>성취기준</th><th>과목명: (수학 II)</th></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>(다)</td><td>성취기준 1</td><td>수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
고등학교 수학 II	이강섭 외	미래엔	2017	58	(가)	
고등학교 수학 II	류희찬 외	천재교과서	2017	53	(가)	
고등학교 수학 II	이강섭 외	미래엔	2017	57	(나)	○
고등학교 수학 II	류희찬 외	천재교과서	2017	52	(나)	○
고등학교 수학 II	이강섭 외	미래엔	2017	139	(다)	
고등학교 수학 II	류희찬 외	천재교과서	2017	159	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당없음

5. 문항 해설

주어진 절대부등식을 산술평균과 기하평균을 이용하여 증명할 수 있는지 알아본다. 간단하지만 쉽게 생각하기 어려운 대수적 조작을 통하여 부등식을 증명하여야 한다. 또한, 수학적 귀납법을 올바로 사용하여 주어진 절대부등식을 증명하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	- 대수적 조작 $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2$을 하면	5
	- 산술기하평균 등을 이용해 부등식을 보이면	5
(3-2)	- 일반성을 잃지 않고 a,b,c 중 하나를 가장 크다고 하면	3
	- d^2+1 항을 곱해주어 좌변의 항을 4개로 만들면	3
	- 이를 이용해 부등식을 보이면	4
(3-3)	- 일반성을 잃지 않고 a_k 또는 어느 하나를 가장 크다고 하면	2
	- 좌변에 적당한 항을 곱하여 수학적 귀납법을 올바로 적용할 수 있도록 변형하면	4
	- 이를 이용해 부등식을 보이면	4

7. 예시 답안

(3-1) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2 \le ((\frac{a+b}{2})^2-1)^2+(a+b)^2=((\frac{a+b}{2})^2+1)^2$

(별해1) $((a+b)^2+4)^2-16(a^2+1)(b^2+1)\ge 0$을 보이면 된다.

$$((a+b)^2+4)^2-16(a^2+1)(b^2+1)=(a+b)^4+8(a+b)^2+16-16(a^2+b^2+a^2b^2+1)$$
$$=(a+b)^4-16a^2b^2-8(a-b)^2=(a-b)^2((a+b)^2+4ab-8)\ge(a-b)^2(8ab-8)\ge 0.$$

(별해2) 부등식이 a,b에 관하여 대칭이므로 $b\ge a$일 때만 생각해도 된다.

함수 $f(x)$를 $f(x)=\left((x+a)^2+4\right)^2-16(a^2+1)(x^2+1)$로 두자. 주어진 부등식을 증명하기 위해는 $x\ge a$이고 $x\ge\frac{1}{a}$일 때, $f(x)\ge 0$임을 보이면 된다. 우선 $f(a)=0$이다. 또한

$$\begin{aligned} f'(x)&=4((x+a)^2+4)(x+a)-32(a^2+1)x \\ &=4\{x^3+3ax^2-(5a^2+4)x+a(a^2+4)\} \\ &=4(x-a)(x^2+4ax-a^2-4) \end{aligned}$$

이므로 $x\ge a$이고 $x\ge\frac{1}{a}$일 때 $f'(x)\ge 0$이다. 따라서 주어진 부등식을 얻는다.

(3-2) 일반성을 잃지 않고 $a \le b \le c$라 하자. 그러면 $cd \ge 1$이다.

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \le ((\frac{a+b}{2})^2+1)^2((\frac{c+d}{2})^2+1)^2$$

$$\le ((\frac{a+b+c+d}{4})^2+1)^4 = ((\frac{a+b+c}{3})^2+1)^4$$

이므로 부등식이 성립한다.

(3-3) 수학적 귀납법을 써서 증명하자. $n=2$일 때는 성립함을 앞에서 보였다.

$n=k-1$일 때 부등식이 성립한다고 가정하자. $A_j = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_j}{j}$라고 하고 일반성을 잃지 않고 a_k가 $a_1,\ldots,a_k$ 중 가장 큰 수라 하자. 그러면

$$(a_1^2+1)\cdots(a_{k-1}^2+1) \le \left(A_{k-1}^2+1\right)^{k-1}$$

이고,

$$(a_k^2+1)(A_k^2+1)^{k-2} \le \left(\left(\frac{a_k+(k-2)A_k}{k-1}\right)^2+1\right)^{k-1} \quad (\because a_k A_k \ge 1)$$

이다. 그러므로

$$(a_1^2+1)\cdots(a_k^2+1)(A_k^2+1)^{k-2} = (a_1^2+1)\cdots(a_{k-1}^2+1)\times(a_k^2+1)(A_k^2+1)^{k-2}$$

$$\le \left(A_{k-1}^2+1\right)^{k-1}\left(\left(\frac{a_k+(k-2)A_k}{k-1}\right)^2+1\right)^{k-1}$$

이다. 한편, $n=2$일 때 부등식이 성립하므로,

$$\left(A_{k-1}^2+1\right)\left(\left(\frac{a_k+(k-2)A_k}{k-1}\right)^2+1\right) \le (A_k^2+1)^2$$

이다. 따라서

$$(a_1^2+1)\cdots(a_k^2+1)(A_k^2+1)^{k-2} \le (A_k^2+1)^{2k-2}$$

가 성립하므로, 주어진 부등식이 $n=k$일 때 성립한다.