2019학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	삼각함수, 사이값 정리	
예상 소요 시간	(35분) / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) $0 < x < 1$일 때 $0 < \sin x < x$이므로 $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} > \sqrt{1-x^2}$이다.

(나) (사이값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) < 0 < f(b)$이면 $f(c) = 0$인 c가 a와 b사이에 존재한다.

(※) 자연수 n에 대하여 함수 $y = \dfrac{1}{x+n}$의 그래프와 함수 $y = \sin x \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

(1-1) 구간 $(0,1)$에서 함수 $g(x) = \sin x - \dfrac{x}{1+x^2}$가 증가함을 보이시오. (10점)

(1-2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \dfrac{1}{n}$ 이 성립함을 보이시오. (10점)

(1-3) 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{a_n} \sin x\, dx$를 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

연속함수의 사이값 정리를 이해하고 이를 적용할 수 있는지와 삼각함수의 극한, 미분, 적분 등 기본적인 계산을 수행할 수 있는지를 평가한다. 삼각함수의 미분을 이용하여 함수의 증가를 판단하도록 한다. 사이값 정리를 적절하게 이용하여 주어진 부등식을 유도할 수 있도록 한다. 삼각함수의 극한의 성질을 사용하여 주어진 극한값을 구한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목 ☐ 수학 Ⅰ ☐ 수학 Ⅱ ☐ 확률과 통계 ■ 미적분 Ⅰ ■ 미적분 Ⅱ ☐ 기하와 벡터
관련 성취기준	(see below)

관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분 Ⅰ, 미적분 Ⅱ)
(가), (나)	성취기준 1	미적분II 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 극한 미적2222. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
	성취기준 1	미적분I 나. 함수의 극한과 연속 2) 함수의 연속 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 Ⅱ	김원경 외	비상교육	2018	81-83	(가)	재구성
미적분 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2018	105-106	(가)	재구성
미적분 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	66-69	(나)	재구성
미적분 Ⅰ	우정호 외	동아출판	2018	89-95	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외

자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(3-1) 함수의 미분을 이용하여 함수의 증가, 감소를 판별하도록 한다.
(3-1) 사이값 정리를 이용하여 방정식의 근의 위치를 구한다. 이로부터 부등식을 유도하도록 한다.
(3-3) 극한이 가지는 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

(1-1) 함수 g를 미분하면

$g'(x) = \cos x - \dfrac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \cos x - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ --(5점)

이다. 제시문 (가)를 이용하면, $0 < x < 1$일 때

$g'(x) = \cos x - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > \sqrt{1-x^2} - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \sqrt{1-x^2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}\right) > 0$

이므로 g는 증가한다.--(5점: 누적 10점)

(1-2) 함수 $h(x) = \sin x - \dfrac{1}{x+n}$에 대하여 제시문 (가)의 $\sin x < x\ (0 < x < 1)$을 이용하면

$h\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right) - \dfrac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+n} < \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+n} < 0$ 임을 알 수 있다. -----------------(4점)

문제 (1-1)번의 결과와 $g(0)=0$인 사실을 이용하면, $0 < x \le 1$일 때 $g(x) > 0$이므로 $\sin x > \dfrac{x}{1+x^2}$ 이다. 이 부등식을 이용하면 $h\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}+n} > \dfrac{\dfrac{1}{n}}{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} -- \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}+n} = 0$ --(4점: 누적 8점)

이다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \dfrac{1}{n}$ 임을 알 수 있다.-----------------------------------(2점: 누적 10점)

(1-3) 문제 (1-2)의 결과와 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$를 이용하여

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} n a_n = 1$ 임을 알 수 있다.---(5점)

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{a_n} \sin x\, dx = \lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos a_n) = \lim_{n\to\infty} n^2 a_n^2 \cdot \dfrac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos a_n} = \dfrac{1}{2}$이다. ------(5점: 누적 10점)

7. 예시 답안

(1-1) 함수 g를 미분하면 $g'(x) = \cos x - \dfrac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \cos x - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 이다.

제시문 (가)를 이용하면, $0 < x < 1$일 때

$$g'(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > \sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \sqrt{1-x^2}\left(1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}\right) > 0$$

이므로 g는 증가한다.

(1-2) 함수 $h(x) = \sin x - \dfrac{1}{x+n}$에 대하여 제시문 (가)의 $\sin x < x\ (0 < x < 1)$을 이용하면

$$h\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} + n} < \frac{1}{n+\sqrt{n}} - \frac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} + n} < 0$$

임을 알 수 있다. 문제 (1-1)번의 결과와 $g(0) = 0$인 사실을 이용하면, $0 < x \le 1$일 때 $g(x) > 0$이므로

$\sin x > \dfrac{x}{1+x^2}$ 이다. 이 부등식을 이용하면 $h\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}+n} > \dfrac{\dfrac{1}{n}}{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} - - \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}+n} = 0$ 이다.

따라서 제시문 (나)에 의해 $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \dfrac{1}{n}$ 임을 알 수 있다.

(1-3) 문제 (1-2)의 결과와 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n a_n = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{a_n} \sin x\, dx = \lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos a_n) = \lim_{n\to\infty} n^2 a_n^2 \cdot \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \frac{1}{2}$$ 이다.

2019학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	부등식, 실수와 자연수	
예상 소요 시간	(35) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 a, b, c에 대하여 $b \le c$이면 $a+b \le a+c$이다.

(나) $a > 0$, $b > 0$일 때, $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ 이다.

(다) 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $k^2 \le n < (k+1)^2$을 만족하는 자연수 k가 유일하게 존재한다.

(※) 자연수 n에 대하여 k를 $k^2 \le n < (k+1)^2$을 만족하는 자연수라 하고, $r = n - k^2$이라 하자.

(2-1) 부등식 $\sqrt{n} \le k + \frac{r}{2k} \le \sqrt{n+1}$이 성립함을 보이시오. (10점)

(2-2) 부등식 $\sqrt{n} \le k + \frac{r+1}{2(k+1)} \le \sqrt{n+1}$이 성립함을 보이시오. (10점)

(2-3) 임의의 자연수 n에 대하여 다음 부등식을 만족하는 자연수 p, q가 존재함을 보이시오. (10점)

$$\sqrt{n} \le \frac{p}{q} \le \sqrt{n+1} \quad (\text{단, } q \le \sqrt{n}+1)$$

3. 출제 의도

1. 기본적인 부등식 문제로서, 수식 계산 능력과 논리적 사고력을 측정하고자 함.
2. (2-1)과 (2-2)는 계산 문제이긴 하나 앞에서 주어진 조건으로부터 쉽게 얻어지는 부등식 $r \le 2k$를 관찰하고 활용하는 것이 포인트로서 부등식의 계산 능력뿐만 아니라 수식에 대한 관찰력과 분석력을 측정하는 것에 중점을 두었음.
3. (2-3)은 계산은 필요 없고 논리적인 사고력과 관찰력만 있으면 쉽게 답을 구할 수 있는 문제로서, 선행이나 경험은 요구되지 않는 문제임.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="3">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅰ)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(가),
(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학 Ⅰ]-나. 방정식과 부등식-4) 여러 가지 부등식
수학1241. 부등식의 성질을 이해하고, 절대값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[수학 Ⅰ]-나. 방정식과 부등식-4) 여러 가지 부등식
수학1242-1. 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2016	94	(가), (나)	
수학 Ⅰ	황선욱 외	㈜좋은책신사고	2017	94	(가), (나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외

자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(2-1) 각 항을 제곱하고 크기를 비교하는 문제로서 단순한 2차식 전개와 수식의 크기 비교로 문제가 해결된다. $r \leq 2k$을 관찰하는 것은 매우 쉽다. 이것을 부등식에 적용하느냐 여부가 이 문제 풀이의 관건이 된다.

(2-2) 역시 각 항을 제곱하고 크기를 비교하는 문제로서 단순한 2차식 전개 외에 인수분해가 필요하게 된다. 여기서도 한쪽 부등식을 보이는 데 있어서 $r \leq 2k$이 주요 역할을 하게 된다.

(2-3) 앞의 두 소문항에서 얻은 결과를 관찰만 하면 쉽게 답을 구할 수 있다. r이 짝수일 때와 홀수일 때의 두 경우로 나누는 것이 이 문제 풀이의 관건이 된다.

6. 채점 기준

(2-1) $\left(k+\frac{r}{2k}\right)^2 = k^2+r+\frac{r^2}{4k^2} \ge k^2+r=n$이므로 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r}{2k} \ge \sqrt{n}$이다. -------------(3점)

또한 $r=n-k^2 < (k+1)^2-k^2 = 2k+1$이므로 $r \le 2k$이다. -----------------------------------(4점: 누적 7점)

따라서 $\left(k+\frac{r}{2k}\right)^2 = k^2+r+\frac{r^2}{4k^2} \le k^2+r+1 = n+1$ 이고 $k+\frac{r}{2k} \le \sqrt{n+1}$이다.-------------(3점: 누적 10점)

(2-2) $n=k^2+r$이므로 다음을 얻는다.

$$\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2 - n = \left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2 - k^2 - r = \frac{r+1}{2(k+1)}\left(2k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right) - r$$
$$= \frac{r^2-2(2k+1)r+(4k^2+4k+1)}{4(k+1)^2} = \frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2} \ge 0$$

따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r+1}{2(k+1)} \ge \sqrt{n}$이다. ---(6점)

또한, (2-1)에서 $r \le 2k$임을 보였으므로

$$\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2 - n - 1 = \frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2} - 1 = \frac{(r-4k-3)(r+1)}{4(k+1)^2} \le 0$$

이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r+1}{2(k+1)} \le \sqrt{n+1}$이 성립한다. ----------------------(4점: 누적 10점)

(2-3) 주어진 자연수 n에 대하여 r이 짝수이면 (2-2)의 부등식에 의해 $\sqrt{n} \le \frac{k^2+\frac{r}{2}}{k} \le \sqrt{n+1}$이므로

$p=k^2+\frac{r}{2}$, $q=k$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다.

주어진 자연수 n에 대하여 r이 홀수이면 (2-2)의 부등식에 의해 $\sqrt{n} \le \frac{k(k+1)+\frac{r+1}{2}}{k+1} \le \sqrt{n+1}$이므로

$p=k(k+1)+\frac{r+1}{2}$, $q=k+1$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다.

--(짝수와 홀수로 나누어 생각하면 2점, 올바른 p,q를 모두 찾으면 8점)

7. 예시 답안

(2-1) $\left(k+\dfrac{r}{2k}\right)^2=k^2+r+\dfrac{r^2}{4k^2}\geq k^2+r=n$이므로 제시문 (나)에 의하여 $k+\dfrac{r}{2k}\geq\sqrt{n}$이다.

또한 $r=n-k^2<(k+1)^2-k^2=2k+1$이므로 $r\leq 2k$이다.

따라서 $\left(k+\dfrac{r}{2k}\right)^2=k^2+r+\dfrac{r^2}{4k^2}\leq k^2+r+1=n+1$ 이고 $k+\dfrac{r}{2k}\leq\sqrt{n+1}$이다.

(2-2) $n=k^2+r$이므로 다음을 얻는다.

$$\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-n=\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-k^2-r=\frac{r+1}{2(k+1)}\left(2k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)-r$$
$$=\frac{r^2-2(2k+1)r+(4k^2+4k+1)}{4(k+1)^2}=\frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2}\geq 0$$

따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\dfrac{r+1}{2(k+1)}\geq\sqrt{n}$이다.

또한, (2-1)에서 $r\leq 2k$임을 보였으므로

$\left(k+\dfrac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-n-1=\dfrac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2}-1=\dfrac{(r-4k-3)(r+1)}{4(k+1)^2}\leq 0$이다.

따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\dfrac{r+1}{2(k+1)}\leq\sqrt{n+1}$이 성립한다.

(2-3) 주어진 자연수 n에 대하여 r이 짝수이면 (2-2)의 부등식에 의해 $\sqrt{n}\leq\dfrac{k^2+\dfrac{r}{2}}{k}\leq\sqrt{n+1}$이므로

$p=k^2+\dfrac{r}{2}$, $q=k$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다.

주어진 자연수 n에 대하여 r이 홀수이면 (2-2)의 부등식에 의해 $\sqrt{n}\leq\dfrac{k(k+1)+\dfrac{r+1}{2}}{k+1}\leq\sqrt{n+1}$이므로

$p=k(k+1)+\dfrac{r+1}{2}$, $q=k+1$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다.

2019학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	미분가능, 삼수선의 정리, 좌표공간, 구의 방정식	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (40점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, 두 극한값 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재하고 두 값이 같은 경우 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. 그렇지 않은 경우 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. 예를 들어, $f(x)=|x|$는 $x>0$일 때 $f(x)=x$이고 $x<0$일 때 $f(x)=-x$이다. 이때, $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ 이고 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$이므로, $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(나) 좌표공간에서 중심이 $C(a,b,c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

이다. 구의 중심이 아닌 점 P에 대하여, 구 위의 점 중에서 P와의 거리가 가장 가까운 것과 가장 먼 것은 모두 직선 PC 위에 있다.

(다) (삼수선의 정리) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 점 Q를 지나지 않는 α 위의 한 직선 l, 직선 l위의 한 점 H에 대하여, 직선 PQ가 α와 수직이고 직선 QH가 l과 수직이면 직선 PH는 l과 수직이다.

(※) 좌표공간에서 k가 실수일 때, 각각의 실수 t에 대하여 점 $(t,kt,0)$과 집합

$$\{(x,y,z)\,|\,x^2+(y-2)^2+(z-5)^2\le 1\}\cup\{(x,y,z)\,|\,(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 1\}$$

에 속하는 점과의 거리 중에서 가장 작은 값을 $f(t)$, 가장 큰 값을 $g(t)$라 하자.

(3-1) $k=0$일 때, 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값을 찾고 그 이유를 설명하시오. (10점)

(3-2) 점 $A(a,b,c)$에서 직선 $l:\ y=kx,\ z=0$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이를 a,b,c,k의 식으로 나타내시오. (10점)

(3-3) $k=1$일 때, 함수 $h(t)=f(t)+g(t)$의 최솟값을 구하시오. (10점)

(3-4) 함수 $h(t)=f(t)+g(t)$의 최솟값이 가장 작게 되도록 하는 k의 값을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

조건에 따라 식이 주어지는 함수의 미분가능성을 파악할 수 있는지, 두 점 사이의 최단경로는 직선이라는 간단한 아이디어를 삼수선의 정리 등을 이용해서 공간도형의 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 이 문제 해결에는 삼수선의 정리를 적용해서 간단히 계산할 수 있는 문제부터 회전이동, 대칭이동 등의 기하학적인 아이디어를 사용하는 문제까지 단계적으로 해결할 수 있도록 문항을 배열하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목 ☐ 수학 Ⅰ ☐ 수학 Ⅱ ☐ 확률과 통계 ■ 미적분 Ⅰ ☐ 미적분 Ⅱ ■ 기하와 벡터		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분 Ⅰ)
	(가)	성취기준 1	미적분I 다. 다항함수의 미분법 1) 미분계수 미적1313. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
	(나)	성취기준 1	기하와벡터 다. 공간도형과 공간벡터 1) 공간도형 기벡1324. 구의 방정식을 구할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
	(다)	성취기준 1	기하와벡터 다. 공간도형과 공간벡터 1) 공간도형 기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 Ⅰ	신항균 외	지학사	2017	91-96	(가)	재구성
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2017	158	(나)	재구성
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2017	138-139	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외

자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(3-1) 미분가능하지 않은 점의 후보를 기하학적인 아이디어로 찾는다.

(3-2) 제시문 (다) 삼수선의 정리를 이용해서 계산을 수행하면서 (3-3)을 해결할 수 있는 힌트를 얻는다.

(3-3) 먼저 주어진 함수는 두 구의 중심으로부터 직선위의 점까지 거리의 합이라는 것을 이해할 수 있어야 한다. 두 구의 중심을 회전이동을 이용해서 좀 더 수월한 위치에 도형을 배열해서 두 구의 중심으로 부터의 거리의 합이 최소가 되는 상황을 찾는다. 이때, 회전축은 주어진 직선이고 회전축과 두 구의 중심은 삼수선의 정리를 이용해서 쉽게 찾을 수 있다.

(3-4) 주어진 함수가 원점을 지나는 평면의 직선에서 정의된 것으로 이해하고 주어진 함수는 두 구의 중심으로부터 직선위의 점까지 거리의 합이라는 것을 이해할 수 있다면, 함수의 최솟값이 가장 작은 수가 되도록 하는 직선은 평면의 점 중에서 두 구의 중심으로부터의 거리의 합이 최소가 되는 것을 지나야 한다는 것을 파악할 수 있다. 이때 대칭이동을 이용해서 좀 더 수월한 위치에 놓고 두 점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 평면의 점을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

(3-1) 점 $(t,0,0)$에서 $(0,2,5)$까지의 거리를 $r_1(t) = \sqrt{t^2+2^2+5^2} = \sqrt{t^2+29}$, 점 $(t,0,0)$에서 $(3,1,1)$까지의 거리를

$r_2(t) = \sqrt{(t-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{t^2-6t+11}$이라고 하면, $r_1(t), r_2(t)$는 각각 실수전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

$r_1(t) > r_2(t)$일 때는 $f(t) = r_2(t)-1$, $r_1(t) < r_2(t)$일 때는 $f(t) = r_1(t)-1$이므로, $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값에서 등식 $r_1(t) = r_2(t)$가 성립해야 한다. -- (3점)

$\sqrt{t^2+29} = \sqrt{t^2-6t+11}$에서 $6t=-18$, 즉 $t=-3$을 얻는다. ------------------------------ (2점: 누적 5점)

실제로 $\lim_{t \to -3-} \frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)} = -\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\lim_{t \to -3+} \frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)} = -\frac{6}{\sqrt{38}}$은 서로 다른 값이므로, 제시문 (가)에 의하여 $f(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다. ---(5점: 누적 10점)

(3-2) 점 $A(a,b,c)$에서 xy평면에 수선을 내리면 점 $(a,b,0)$이 되고, xy평면에서 점 $(a,b,0)$과 주어진 직선 $y-kx=0$사이의 거리는 $\frac{|ka-b|}{\sqrt{k^2+1}}$이다. 제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여, ---------------------------(5점)

선분 AH의 길이는 $\sqrt{\frac{(ka-b)^2}{k^2+1}+c^2}$이 된다. --(5점: 누적 10점)

(다른 답 형태: $\sqrt{a^2+b^2+c^2-\frac{(a+kb)^2}{k^2+1}}$ 또는 $\sqrt{\left(\frac{a+kb}{k^2+1}-a\right)^2+\left(\frac{(a+kb)k}{k^2+1}-b\right)^2+c^2}$ 도 맞음)

(3-3) 점 $(t,t,0)$에서 $A_1(0,2,5)$까지의 거리와 $A_2(3,1,1)$까지의 거리를 각각 $r_1(t), r_2(t)$라고 하면,

$r_1(t) \ge r_2(t)$일 때 $f(t) = r_2(t)-1, g(t) = r_1(t)+1$이고 $r_1(t) < r_2(t)$일 때 $f(t) = r_1(t)-1, g(t) = r_2(t)+1$ 이므로 등식 $h(t) = f(t)+g(t) = r_1(t)+r_2(t)$가 성립한다. ---(3점)

점 $(t,t,0)$에서 A_1까지의 거리는 A_1을 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같고,

마찬가지로 점 $(t,t,0)$에서 A_2까지의 거리는 A_2를 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같다.

점 A_1와 점 A_2에서 직선 $l=\{(t,t,0)|t는 실수\}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면, H_1, H_2의 좌표는 각각 $(1,1,0)$, $(2,2,0)$이다. A_1과 H_1의 거리는 제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여 $\sqrt{\sqrt{2^2+5^2}}=3\sqrt{3}$이고, A_2와 H_2와의 거리는 $\sqrt{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{3}$이다. 이제, l을 중심축으로 하는 회전을 이용하여, 두 점 A_1과 A_2를 적당히 회전시켜 xy평면위에 있고 l을 기준으로 서로 다른 반평면에 위치한 두 점 A_1', A_2'으로 대체할 수 있다. 그러면, 점 $(t,t,0)$이 직선 $A_1'A_2'$와 직선 l의 교점일 때 $h(t)$는 최솟값을 가지게 되고, --- (4점: 누적 7점)

그 최솟값은 $\overline{A_1'A_2'}=\sqrt{(\overline{A_1'H_1}+\overline{A_2'H_2})^2+\overline{H_1H_2}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+\sqrt{2^2}}=5\sqrt{2}$ 이다. ----(3점: 누적 10점)

(3-4) 위 (3-3)의 풀이에서 $h(t)$은 점 $(t,kt,0)$에서 두 점 $A_1(0,2,5)$, $A_2(3,1,1)$까지의 거리의 합이다. 이 두 점 A_1, A_2까지의 거리의 합이 최소가 되는 xy평면위의 점은 A_2를 xy평면에 대칭이동시킨 점 $A_2'(3,1,-1)$과 $A_1(0,2,5)$을 잇는 직선이 xy평면과 만나는 점 B이다. --- (5점)

이 직선의 방정식은 $(x,y,z)=(0,2,5)+s(3,-1,-6)$ (s는 실수)이고, $s=\frac{5}{6}$일 때 점 $B(\frac{5}{2},\frac{7}{6},0)$을 얻는다.

직선 $\{(t,kt,0)|t는 실수\}$가 점 B를 지나려면, $k=\frac{7}{15}$이어야 한다. ---------------------------(5점: 누적 10점)

7. 예시 답안

(3-1) 점 $(t,0,0)$에서 $(0,2,5)$까지의 거리를 $r_1(t)=\sqrt{t^2+2^2+5^2}=\sqrt{t^2+29}$,

점 $(t,0,0)$에서 $(3,1,1)$까지의 거리를 $r_2(t)=\sqrt{(t-3)^2+1^2+1^2}=\sqrt{t^2-6t+11}$이라고 하면,

$r_1(t), r_2(t)$는 각각 실수전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

$r_1(t)>r_2(t)$일 때는 $f(t)=r_2(t)-1$, $r_1(t)<r_2(t)$일 때는 $f(t)=r_1(t)-1$이므로,

$f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값에서 등식 $r_1(t)=r_2(t)$가 성립해야 한다.

$\sqrt{t^2+29}=\sqrt{t^2-6t+11}$에서 $6t=-18$, 즉 $t=-3$을 얻는다.

실제로 $\lim_{t\to-3-}\frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}=-\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\lim_{t\to-3+}\frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}=-\frac{6}{\sqrt{38}}$은 서로 다른 값이므로, 제시문 (가)에 의하여 $f(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.

(3-2) 점 $A(a,b,c)$에서 xy평면에 수선을 내리면 점 $(a,b,0)$이 되고, xy평면에서 점 $(a,b,0)$과 주어진 직선 $y-kx=0$사이의 거리는 $\frac{|ka-b|}{\sqrt{k^2+1}}$이다. 제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여, 선분 AH의 길이는 $\sqrt{\frac{(ka-b)^2}{k^2+1}+c^2}$이 된다.

(3-3) 점 $(t,t,0)$에서 $A_1(0,2,5)$까지의 거리와 $A_2(3,1,1)$까지의 거리를 각각 $r_1(t), r_2(t)$라고 하면,

$r_1(t)\ge r_2(t)$일 때 $f(t)=r_2(t)-1, g(t)=r_1(t)+1$이고 $r_1(t)<r_2(t)$일 때 $f(t)=r_1(t)-1, g(t)=r_2(t)+1$ 이므로 등식 $h(t)=f(t)+g(t)=r_1(t)+r_2(t)$가 성립한다.

점 $(t,t,0)$에서 A_1까지의 거리는 A_1을 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같고, 마찬가지로 점 $(t,t,0)$에서 A_2까지의 거리는 A_2를 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같다.

점 A_1와 점 A_2에서 직선 $l=\{(t,t,0)|t\text{는 실수}\}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면, H_1, H_2의 좌표는 각각 $(1,1,0)$, $(2,2,0)$이다. A_1과 H_1의 거리는 제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여 $\sqrt{\sqrt{2^2}+5^2}=3\sqrt{3}$이고, A_2와 H_2와의 거리는 $\sqrt{\sqrt{2^2}+1^2}=\sqrt{3}$이다. 이제, l을 중심축으로 하는 회전을 이용하여, 두 점 A_1과 A_2를 적당히 회전시켜 xy평면위에 있고 l을 기준으로 서로 다른 반평면에 위치한 두 점 $A_1{}', A_2{}'$으로 대체할 수 있다. 그러면, 점 $(t,t,0)$이 직선 $A_1{}'A_2{}'$와 직선 l의 교점일 때 $h(t)$는 최솟값을 가지게 되고,

그 최솟값은 $\overline{A_1{}'A_2{}'}=\sqrt{(\overline{A_1{}'H_1}+\overline{A_2{}'H_2})^2+\overline{H_1H_2}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+\sqrt{2^2}}=5\sqrt{2}$ 이다.

(3-4) 위 (3-3)의 풀이에서 $h(t)$은 점 $(t,kt,0)$에서 두 점 $A_1(0,2,5)$, $A_2(3,1,1)$까지의 거리의 합이다. 이 두 점 A_1, A_2까지의 거리의 합이 최소가 되는 xy평면위의 점은 A_2를 xy평면에 대칭이동시킨 점 $A_2{}'(3,1,-1)$과 $A_1(0,2,5)$을 잇는 직선이 xy평면과 만나는 점 B이다.

이 직선의 방정식은 $(x,y,z)=(0,2,5)+s(3,-1,-6)$ (s는 실수)이고, $s=\frac{5}{6}$일 때 점 $B(\frac{5}{2},\frac{7}{6},0)$을 얻는다.

직선 $\{(t,kt,0)|t\text{는 실수}\}$가 점 B를 지나려면, $k=\frac{7}{15}$이어야 한다.