2019학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	수열, 부등식, 직선의 방정식	
예상 소요 시간	(30) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(나) 서로 다른 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1 \neq x_2 \text{ 일 때, } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ 일 때, } x = x_1$$

(다) $a \geq b > 0$이고 $c \geq d > 0$이면 $ac \geq bd$이다.

(※) 좌표 평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ 위의 점 A_n이

$$\overline{OA_n} = \frac{1}{n^2}$$

을 만족할 때, A_n의 x좌표를 a_n이라 하자. 두 점 A_n과 $\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선의 x절편을 b_n이라 하자. (단, O는 원점이다.)

(1-1) 극한 $\lim_{n \to \infty} n^4 a_n$을 구하시오. (10점)

(1-2) 극한 $\lim_{n \to \infty} b_n$을 구하시오. (10점)

(1-3) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$(n+2)a_{n+1} \leq (n+1)a_n.$$

3. 출제 의도

기본적인 대수적 계산능력을 평가한다. 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 수열의 극한과 성질을 파악할 수 있는지를 평가하고자 했다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ■ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>
<table>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅰ)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학I]-다. 도형의 방정식-1) 평면좌표
수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식
수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>(다)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학I]-나. 방정식과 부등식-4) 여러 가지 부등식
수학1241. 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 Ⅰ	황선욱 외	좋은책신사고	2017	117	(가)	
수학 Ⅰ	황선욱 외	좋은책신사고	2017	132	(나)	
수학 Ⅰ	황선욱 외	좋은책신사고	2017	94	(다)	○
수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2016	114	(가)	
수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2016	129	(나)	
수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2016	94	(다)	○
수학 Ⅰ	조도연 외	경기도교육청	2016	158	(가)	
수학 Ⅰ	조도연 외	경기도교육청	2016	179	(나)	
수학 Ⅰ	조도연 외	경기도교육청	2016	129	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외

자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(1-1) 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하고 이에 관련한 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(1-2) 수열 $\{b_n\}$과 $\{a_n\}$의 관계식을 구하고 (1-1)의 결과를 이용하여 b_n의 극할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(1-3) 수열 $\{(n+1)a_n\}$이 n이 증가함에 따라 감소한다는 것을 보이는 문제로 (1-1)에서 구한 수열 $\{a_n\}$의 일반항과 간단한 대수적 조작으로 쉽게 보일 수 있다.

6. 채점 기준

(1-1) $A_n = \left(a_n, \sqrt{a_n}\right)$ 이므로 주어진 조건으로부터 $a_n^2 + a_n = \dfrac{1}{n^4}$ 을 얻는다. -- (4점)

한편 $a_n \geq 0$ 이므로 위의 2차 방정식의 양의 해 $a_n = \dfrac{-1+\sqrt{1+4/n^4}}{2} = \dfrac{2}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})}$ 을 얻는다. -- (3점: 누적 7점)

따라서 주어진 극한은 $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 a_n = 1$이다. --- (3점: 누적 10점)

(별해) $A_n = \left(a_n, \sqrt{a_n}\right)$ 이므로 주어진 조건으로부터 $a_n^2 + a_n = \dfrac{1}{n^4}$-- (4점)

$1/n^2 \to 0,\ a_n > 0$을 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

한편 $n^4 a_n = \dfrac{1}{a_n+1}$이다. --(3점: 누적 7점)

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n+1} = 1$ ---(3점: 누적 10점)

(1-2) 두 점 $A_n,$ $\left(0, \dfrac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선은 $y = \dfrac{\sqrt{a_n} - 1/n^2}{a_n} x + \dfrac{1}{n^2}$ --- (3점)

으로 주어지며 이로부터 $b_n = \dfrac{a_n}{1 - n^2\sqrt{a_n}}$ -- (3점: 누적 6점)

$= \dfrac{1}{n^4 a_n} + \dfrac{1}{n^2\sqrt{a_n}}$ 을 얻는다.

따라서 (1-1)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ 을 얻는다. --- (4점: 누적 10점)

(별해) 두 점 $A_n,$ $\left(0, \dfrac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선은 $y = \dfrac{\sqrt{a_n} - 1/n^2}{a_n} x + \dfrac{1}{n^2}$ --- (3점)

$b_n = \dfrac{a_n}{1 - n^2\sqrt{a_n}}$--- (3점: 누적 6점)

$= \sqrt{a_n+1} + a_n + 1$

따라서 별해(1-1)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_n+1} + a_n + 1) = 2$ 을 얻을 수 있다. ---------------------------(4점: 누적 10점)

(1-3) (1-1)로부터 $(n+1)a_n = \dfrac{2(n+1)}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})} = \dfrac{2(n+1)}{n^2(n^2+\sqrt{n^4+4})}$ 을 얻는다. 따라서 다음이 성립한다.

$(n+2)a_{n+1} \leq (n+1)a_n \iff (n+2)n^2(n^2+\sqrt{n^4+4}) \leq (n+1)^3((n+1)^2+\sqrt{(n+1)^4+4})$ --------------------- (3점)

이 때, $(n+2)n^2 \leq (n+1)^3,\ n^2+\sqrt{n^4+4} \leq (n+1)^2+\sqrt{(n+1)^4+4}$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다. - (7점: 누적 10점)

* 위의 두 부둥식 중 하나 틀린 경우 총 7점 중에서 -4점

(1-3) (별해) $c_n = (n+1)a_n$ 로부터 $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^4}} - 1\right)$ 를 두고서 양의 $x > 0$에 대하여

$f'(x) = \frac{x^5(1-\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}) - 4(x+2)}{2x^5\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}} < 0$-- (10점, $f'(x)$가 틀리면 -4점)

7. 예시 답안

(1-1) $A_n = \left(a_{n,} \sqrt{a_n}\right)$ 이므로 주어진 조건으로부터 $a_n^2 + a_n = \frac{1}{n^4}$을 얻는다.

한편 $a_n \geq 0$ 이므로 위의 2차 방정식의 양의 해

$a_n = \frac{-1+\sqrt{1+4/n^4}}{2} = \frac{2}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})}$ 을 얻는다. 따라서 주어진 극한은 $\lim_{n\to\infty} n^4 a_n = 1$이다.

(1-2) 두 점 $A_{n,}$ $\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선은 $y = \frac{\sqrt{a_n} - 1/n^2}{a_n}x + \frac{1}{n^2}$ 으로 주어지며 이로부터

$b_n = \frac{a_n}{1-n^2\sqrt{a_n}} = \frac{1}{n^4 a_n} + \frac{1}{n^2\sqrt{a_n}}$ 을 얻는다. 따라서 (1-1)에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ 을 얻는다.

(1-3) (1-1)로부터 $(n+1)a_n = \frac{2(n+1)}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})} = \frac{2(n+1)}{n^2(n^2+\sqrt{n^4+4})}$을 얻는다. 따라서 다음이 성립한다.

$$(n+2)a_{n+1} \leq (n+1)a_n \iff (n+2)n^2\sqrt{n^4+4} \leq (n+1)^3\sqrt{(n+1)^4+4}$$

이 때, $(n+2)n^2 \leq (n+1)^3$, $\sqrt{n^4+4} \leq \sqrt{(n+1)^4+4}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

2019학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	벡터의 성분, 내적, 벡터크기, 공간좌표, 공간벡터, $\vec{a}$, $\lvert\vec{a}\rvert$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$	
예상 소요 시간	(30) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta\le\pi)$라고 할 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

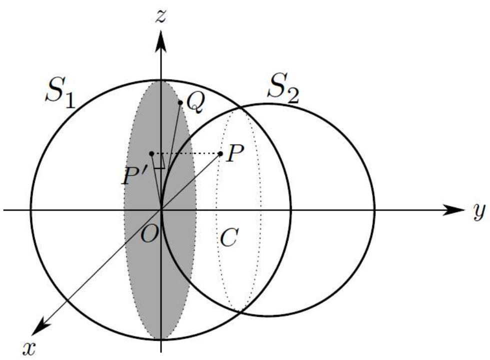
(나) 세 벡터 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2,\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

(※) 아래 그림과 같이 두 개의 구

$$S_1: x^2+y^2+z^2=r^2\ (0<r<2),\quad S_2: x^2+(y-1)^2+z^2=1$$

이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 P에서 zx평면에 내린 수선의 발을 P'이라 하고 원 $x^2+z^2=r^2, y=0$ 위의 점을 Q라 하자. (단, O는 원점이다.)



(2-1) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP'}$일 때, k의 값을 r에 대한 식으로 나타내시오. (10점)

(2-2) 점 $A(0,4,0)$에 대하여, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 r에 대한 식으로 나타내시오. (10점)

(2-3) 실수 r $(0<r<2)$에 대하여, 사면체 $OPQP'$의 최대 부피를 $V(r)$이라 하자.

(a) $V(r)$이 최대가 되는 r의 값을 구하시오. (10점)

(b) $V(r)$이 최대일 때, 세 점 O,P,Q를 포함하는 평면과 zx평면이 이루는 각 α에 대하여 $\sin\alpha$의 값을 구하시오. (5점)

3. 출제 의도

공간도형의 위치관계 (두 구의 교선, 평면과 평면의 위치관계)를 공간좌표와 벡터의 개념, 특히 벡터의 내적의 뜻을 알고 이를 주어진 문제에 활용할 수 있는지를 알아보고자 하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
☐ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ ■ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (기하와 벡터)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(가),
(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[기하와 벡터]-다. 공간 도형과 공간 벡터-2) 공간좌표
기벡1321/1322 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[기하와 벡터]-다. 공간 도형과 공간 벡터-3) 공간벡터
기벡1331 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[기하와 벡터]-다. 공간 도형과 공간 벡터-3) 공간벡터
기벡1333 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	이강섭 외	㈜미래엔	2017	179-186	(가), (나)	
기하와 벡터	황선욱 외	㈜좋은책 신사고	2017	148-155	(가), (나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외

자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(2-1) 두 구 S_1, S_2의 교선 C위의 한 점 P에서 xz평면에 내린 수선의 발 P'와 S_1 위의 점 Q의 위치벡터가 평행이 되도록 하는 상수 k를 구하는 문제로 벡터 $\overrightarrow{OP'}$의 크기를 알면 쉽게 구할 수 있다.

(2-2) 주어진 점 $A(0,4,0)$에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하는 문제이다. 제시문에 주어진 벡터의 내적과 연산 성질을 이용하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$ 를 두 벡터 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$사이의 각 θ를 이용하여 표현하고 (2-1)에서 구한 k값이 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$이 최대, 최소가 된다는 사실을 이용하여 구할 수 있다. 또한 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 값이 최대, 최소가 되는 점 P와 Q의 위치관계를 파악하면 쉽게 해결할 수 있다.

(2-3) (a) 사면체 $OPQP'$가 부피가 최대가 되는 경우는 삼각형 OPQ의 넓이가 최대, 즉 $\overrightarrow{OP'}$과 $\overrightarrow{OQ}$가 서로 수직인 경우이므로 삼각형 OPQ가 직각이등변 삼각형임을 알 수 있고 따라서 사면체 $OPQP'$를 r에 대한 식으로 표현할 수 있다.

(b) 두 평면이 이루는 각은 OPP'이 직각삼각형임을 인지하면 쉽게 구할 수 있다.

6. 채점 기준

(2-1) C의 방정식은 $x^2+z^2=\left(\dfrac{r\sqrt{4-r^2}}{2}\right)^2$, $y=\dfrac{r^2}{2}$이다. C 위의 한 점을 $P(x_1,\dfrac{r^2}{2},z_1)$라 하면 $P'(x_1,0,z_1)$이고

$|\overrightarrow{OP'}|=\dfrac{r\sqrt{4-r^2}}{2}$ --- (5점)

$|\overrightarrow{OQ}|=r$이므로 $k=\pm\dfrac{2}{\sqrt{4-r^2}}$이다. -------------------------------------- (5점, 부호 하나 빠지면 -2점 : 누적 10점)

(2-2) $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$ 사이의 각을 θ $(0<\theta<\pi)$라 하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$ --- (3점)

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$=16-2r^2+r^2\cos\theta-2r^2+2r^2\cos\theta=3r^2\cos\theta-4r^2+16$-- (3점 : 누적 6점)

이고 $\cos\theta$가 최대, 최소가 되는 경우는 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP'}$ 이므로 (2-1)에 의해

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{k|\overrightarrow{OP}|}=\frac{1}{k}=\pm\frac{\sqrt{4-r^2}}{2} \text{ 이고 } -\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}\le\cos\theta\le\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}$$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $32-8r^2$ 이다. --- (4점 : 누적 10점)

(2-3) (a) $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$일 때, 삼각형 $OP'Q$의 넓이가 최대이므로 $\triangle OP'Q=\dfrac{r^2\sqrt{4-r^2}}{4}$ 이고

사면체 $OPQP'$의 높이가 $|\overrightarrow{PP'}|=\dfrac{r^2}{2}$이므로 사면체 $OPQP'$의 부피

$V(r)=\dfrac{1}{3}\times(\text{삼각형 } OP'Q\text{의 넓이})\times\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{r^4\sqrt{4-r^2}}{24}$이다.-- (5점)

미분을 이용하여 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 되는 값은 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$이다.--------------------- (5점 : 누적 10점)

(b) 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 될 때 삼각형 OPQ은 한 변의 길이가 r인 직각이등변삼각형이고 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\dfrac{r}{2}$이다. --- (3점 : 누적 13점)

(2-3)(a)에 의해 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다. ---(2점 : 누적 15점)

7. 예시 답안

(2-1) C의 방정식은 $x^2+z^2=\left(\dfrac{r\sqrt{4-r^2}}{2}\right)^2$, $y=\dfrac{r^2}{2}$이다. C 위의 한 점을 $P(x_1,\dfrac{r^2}{2},z_1)$라 하면 $P'(x_1,0,z_1)$이고

$|\overrightarrow{OP'}|=\dfrac{r\sqrt{4-r^2}}{2}$, $|\overrightarrow{OQ}|=r$이므로 $k=\pm\dfrac{2}{\sqrt{4-r^2}}$이다.

(2-2) $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$ 사이의 각을 θ $(0<\theta<\pi)$라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\\&=16-2r^2+r^2\cos\theta-2r^2+2r^2\cos\theta=3r^2\cos\theta-4r^2+16\end{aligned}$$

이고 $\cos\theta$가 최대, 최소가 되는 경우는 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP'}$이므로 (2-1)에 의해

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{k|\overrightarrow{OP}|}=\frac{1}{k}=\pm\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}\ \text{이고}\ -\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}\le\cos\theta\le\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}$$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $32-8r^2$ 이다.

(2-3) (a) $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$일 때, 삼각형 $OP'Q$의 넓이가 최대이므로 $\triangle OP'Q=\dfrac{r^2\sqrt{4-r^2}}{4}$이고 사면체 $OPQP'$의 높이가

$|\overrightarrow{PP'}|=\dfrac{r^2}{2}$이므로 사면체 $OPQP'$의 부피

$$V(r)=\frac{1}{3}\times(\text{삼각형 }OP'Q\text{의 넓이})\times\frac{r^2}{2}=\frac{r^4\sqrt{4-r^2}}{24}\text{이다.}$$

미분을 이용하여 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 되는 값은 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$이다.

(b) 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 될 때 삼각형 OPQ은 한 변의 길이가 r인 직각이등변삼각형이고 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\dfrac{r}{2}$이다. (2-3)(a)에 의해 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

2019학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	등비수열, 등비급수, 정적분, 사이값 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n = ar^{n-1}$이다. $r \neq 1$일 때, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이다.

(나) (사이값 정리) 구간 $[a,b]$ 위의 두 연속함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(a) < g(a)$이고 $f(b) > g(b)$이면, $f(c) = g(c)$인 c가 구간 (a,b)에 반드시 존재한다.

(※) 수열 $\{a_n\}$과 $\{x | x \geq 0\}$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(1) 구간 $[0,1]$에서 $f(x) = x$이다.

(2) $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 구간 $[a_n, a_{n+1}]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 기울기가 $(-1)^n$인 직선의 일부이다.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_{n+1}) = -2f(a_n)$이다.

(3-1) 수열 $\{a_n\}$의 5번째 항 a_5의 값을 구하시오. (5점)

(3-2) $f(x) = 0$을 만족하는 x $(x > 0)$의 값을 작은 것부터 순서대로 $x_1, x_2, x_3, \ldots$이라고 할 때, x_{10}의 값을 구하시오. (5점)

(3-3) $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = 1000$인 가장 작은 양수 α의 값이 구간 (a_k, a_{k+1})에 속할 때, k의 값을 구하시오. (10점)

(3-4) $|m| \leq \dfrac{1}{10}$인 실수 m에 대하여, $\displaystyle\int_0^{x} (f(t) - mt)\,dt = 0$을 만족하는 양수 x의 값이 무한히 많음을 보이시오. (15점)

3. 출제 의도

등비수열, 등비급수와 이로부터 만들어진 도형의 성질을 파악할 수 있는지, 적분의 기본개념을 이해하고 있는지, 사이값 정리를 이용해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. 등비수열과 급수는 함수를 정의하는 과정에 숨겨져 있으며, 이 함수를 파악하는 과정에서 등비수열이 만들어 진다. 이러한 상황에서 닮은 도형이 배열되어 있는 것을 제시문의 도움을 받아서 알아낼 수 있도록 하고, 등비급수의 정확한 식을 계산해서 사이값 정리를 적용해야 하는 문항까지 단계적으로 제시하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
☐ 수학 I ■ 수학 II ☐ 확률과 통계 ■ 미적분 I ☐ 미적분 II ☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 II)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>수학 II 다. 수열 1) 등차수열과 등비수열
수학2312-2. 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분 I)</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 3</td><td>미적분 I 나. 함수의 극한과 연속 2) 함수의 연속
미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 II	신항균 외	지학사	2017	137	(가)	
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	75-76	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(3-1) 주어진 조건으로부터 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 패턴을 파악하면 a_5의 값은 별도의 공식에 대한 지식없이도 구할 수 있다. 이 문항은 문제의 조건을 잘 파악했는지 확인하는 문항이다.

(3-2) 이 문항 역시 문제의 조건을 잘 파악했는지 확인하는 문항으로, 등비수열의 합에 관한 공식을 이용하여 간단한 계산을 하도록 한다.

(3-3) 정적분과 넓이와의 관계를 인지하고 있다면 이 문제도 별도의 공식을 적용하지 않아도 해결할 수 있다. 예를 들어, $1-4+16-64+256-1024+4096/2$이 1000을 넘는다는 것을 확인할수 있고, 이 값이 $\int_0^{a_7} f(t)\,dt$ 이므로 $k=6$임을 알 수 있다.

(3-4) $F(x)$는 구간 $[x_{n-1}, x_n]$에서 n이 홀수이면 증가함수, n이 짝수이면 감소함수이므로 이 구간 $[x_{n-1}, x_n]$에서 제시문 (나)에서 주어진 사이값 정리를 적용한다는 전략을 세울 수 있다.

6. 채점 기준

(3-1) 구간 (a_n, a_{n+1})에서 함수 $f(x)$의 x절편을 x_n이라고 하면, $\{x_n\}$은 $x_1 = 2$이고

$n \ge 2$일 때 $x_n - x_{n-1} = 2 \times 2^{n-1}$을 만족한다. $a_n = \dfrac{x_{n-1} + x_n}{2}$이므로, ------------------------------------- (3점)

$x_4 = \dfrac{2(2^4-1)}{2-1} = 30, x_5 = 30 + 32 = 62$이고 $a_5 = \dfrac{30+62}{2} = 46$이다. ----------------------------- (2점: 누적 5점)

(별해) $a_2 = 2+2 = 4$, $a_3 = 2+4+4 = 10$, $a_4 = 2+4+8+8 = 22$, $a_5 = 2+4+8+16+16 = 46$이다.

(3-2) x_n은 등비수열 $\{2^n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로 $x_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$이다. ------------- (3점)

따라서 $x_{10} = 2^{11} - 2 = 2046$이다. ---(2점: 누적 5점)

(3-3) $f(a_n) = (-1)^{n+1} 2^{n-1}$이므로, $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) f(a_n) = \dfrac{1}{2} \times 2^n \times (-2)^{n-1} = (-4)^{n-1}$이므로,

$$\int_0^{a_n} f(t)\,dt = \int_0^{x_{n-1}} f(t)\,dt + \int_{x_{n-1}}^{a_n} f(t)\,dt$$

$= (1 - 4 + 4^2 - \cdots + (-4)^{n-2}) + \dfrac{(-4)^{n-1}}{2} = \dfrac{(-4)^{n-1} - 1}{(-4)-1} + \dfrac{(-4)^{n-1}}{2} = \dfrac{3(-4)^{n-1} + 2}{10}$이다. --------------- (5점)

$4^5 = 1024, 4^6 = 4096$이므로, $\int_0^{a_n} f(t)\,dt$가 1000이상인 가장 작은 n의 값은 $3(-4)^{n-1} + 2 > 10000$

즉 $(-4)^{n-1} > 3332.6$을 만족하는 $n = 7$이다. 따라서 $\int_0^x f(t)\,dt = 1000$인 가장 작은 x의 값은 구간 (a_6, a_7)에 있다.

그러므로 $k = 6$. --------------------------------------(5점: 누적 10점, 논리적인 설명이 없이 식만 나열한 뒤 정확한 답을 구한 경우 최대 7점)

(3-4) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라고 하면,

$F(x_n) = \int_0^{x_n} f(t)\,dt = 1 - 4 + 4^2 - \cdots + (-4)^{n-1} = \dfrac{(-4)^n - 1}{(-4)-1} = \dfrac{-(-4)^n + 1}{5}$이고,

$G(x)=\int_0^x mt\,dt = \frac{1}{2}mx^2$이라고 하면, $x_n = 2(1+2+\cdots 2^{n-1}) = 2\times 2^n - 2$이므로

$G(x_n) = 2m(2^n-1)^2$이다. -- (5점)

이제, $-\frac{1}{10} \le m \le \frac{1}{10}$이라고 하면,

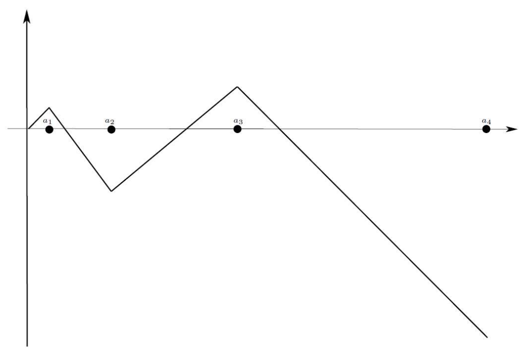
n이 홀수일 때 $G(x_n) = 2m(2^n-1)^2 = 2m(4^n - 2\times 2^n + 1) < \frac{1}{5}(4^n+1) = F(x_n)$이고

n이 짝수일 때 $G(x_n) = 2m(2^n-1)^2 = 2m(4^n - 2\times 2^n + 1) > -\frac{1}{5}(4^n-1) = F(x_n)$이므로, 제시문 (나)의 사이값 정리에 의하여 $F(x) = G(x)$인 값이 모든 구간 (x_n, x_{n+1})에 하나씩 존재한다. -------------------------- (7점: 누적 12점)

따라서 등식 $\int_0^x (f(t) - mt)\,dt = 0$을 만족하는 양수 x의 값은 무수히 많다. ------------------------ (3점: 누적 15점)

7. 예시 답안

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



(3-1) 구간 (a_n, a_{n+1})에서 함수 $f(x)$의 x절편을 x_n이라고 하면, $\{x_n\}$은 $x_1 = 2$이고

$n \ge 2$일 때 $x_n - x_{n-1} = 2\times 2^{n-1}$을 만족한다.

$a_n = \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$이므로, $x_4 = \frac{2(2^4-1)}{2-1} = 30, x_5 = 30+32 = 62$이고 $a_5 = \frac{30+62}{2} = 46$이다.

(별해) $a_2 = 2+2 = 4$, $a_3 = 2+4+4 = 10$, $a_4 = 2+4+8+8 = 22$, $a_5 = 2+4+8+16+16 = 46$이다.

(3-2) x_n은 등비수열 $\{2^n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로 $x_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$이다.

따라서 $x_{10} = 2^{11} - 2 = 2046$이다.

(3-3) $f(a_n) = (-1)^{n+1}2^{n-1}$이므로, $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})f(a_n) = \frac{1}{2}\times 2^n \times (-2)^{n-1} = (-4)^{n-1}$이므로,

$$\int_0^{a_n} f(t)\,dt = \int_0^{x_{n-1}} f(t)\,dt + \int_{x_{n-1}}^{a_n} f(t)\,dt$$

$= (1-4+4^2-\cdots+(-4)^{n-2}) + \frac{(-4)^{n-1}}{2} = \frac{(-4)^{n-1}-1}{(-4)-1} + \frac{(-4)^{n-1}}{2} = \frac{3(-4)^{n-1}+2}{10}$이다.

$4^5 = 1024, 4^6 = 4096$이므로, $\int_0^{a_n} f(t)\,dt$가 1000이상인 가장 작은 n의 값은 $3(-4)^{n-1} + 2 > 10000$ 즉 $(-4)^{n-1} > 3332.6$을 만족하는 $n = 7$이다. 따라서 $\int_0^x f(t)\,dt = 1000$인 가장 작은 x의 값은 구간 (a_6, a_7)에 있다. 그러므로 $k = 6$.

(3-4) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라고 하면,

그런데, $F(x_n) = \int_0^{x_n} f(t)\,dt = 1 - 4 + 4^2 - \cdots + (-4)^{n-1} = \dfrac{(-4)^n - 1}{(-4) - 1} = \dfrac{-(-4)^n + 1}{5}$이고,

$G(x) = \int_0^x mt\,dt = \dfrac{1}{2}mx^2$이라고 하면, $x_n = 2(1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) = 2 \times 2^n - 2$이므로 $G(x_n) = 2m(2^n - 1)^2$이다.

이제, $-\dfrac{1}{10} \le m \le \dfrac{1}{10}$이라고 하면,

n이 홀수일 때 $G(x_n) = 2m(2^n - 1)^2 = 2m(4^n - 2 \times 2^n + 1) < \dfrac{1}{5}(4^n + 1) = F(x_n)$이고

n이 짝수일 때 $G(x_n) = 2m(2^n - 1)^2 = 2m(4^n - 2 \times 2^n + 1) > \dfrac{-1}{5}(4^n - 1) = F(x_n)$이므로, 제시문 (나)의 사이값 정리에 의하여 $F(x) = G(x)$인 값이 모든 구간 (x_n, x_{n+1})에 하나씩 존재한다.

따라서 등식 $\int_0^x (f(t) - mt)\,dt = 0$을 만족하는 양수 x의 값은 무수히 많다.