2017학년도 논술우수자_자연계열 (오후)

① 논술우수자 자연계(오후) 문항1

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자(일반)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 오후 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II
	핵심개념 및 용어	수열, 수학적 귀납법
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 양의 실수 a에 대하여 $a+\frac{1}{a}\geq 2$이다.

(나) 어떤 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n\geq 2$에 대하여 성립함을 증명할 때, 수학적 귀납법을 이용하려면 다음 두 가지를 보여야 한다.

(i) $n=2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k\geq 2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 부등식을 만족한다.

$$a_{n+1}\geq \frac{na_n}{{a_n}^2+n-1}\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

(1-1) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (6점)

$$\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n}\leq a_n$$

(1-2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (7점)

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq \frac{n}{a_{n+1}}$$

(1-3) 수학적 귀납법을 이용하여, 모든 자연수 $n \geq 2$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (12점)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

3. 출제 의도

기본적인 대수적 조작 능력을 평가한다. 또한, 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 이를 적용하여 주어진 명제를 증명할 수 있는가를 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준 · 성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[수학 II]-(가) 집합과 명제-$\boxed{2}$ 명제 ④ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
	성취기준	[수학 II]-가. 집합과 명제-2) 명제 수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[수학II]-(다) 수열-$\boxed{3}$ 수학적 귀납법 ② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-다. 수열-3) 수학적 귀납법 수학2332. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	[수학II]-(다) 수열-$\boxed{3}$ 수학적 귀납법 ① 수열의 귀납적 정의를 이해한다. ② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-다. 수열-3) 수학적 귀납법 수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다. 수학2332. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	[수학II]-(다) 수열-$\boxed{3}$ 수학적 귀납법 ① 수열의 귀납적 정의를 이해한다. ② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-다. 수열-3) 수학적 귀납법 수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다. 수학2332. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.

논제 1-3	교육과정	[수학II]-(다) 수열-③ 수학적 귀납법 ② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준	[수학 II]-다. 수열-3) 수학적 귀납법 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외	비상교육	2014	109,110, 140,142
	수학 II	정상권 외	금성출판사	2014	122,156
기타					

5. 문항 해설

(1-1) 주어진 조건 $a_n \ge \dfrac{na_n}{a_n^2+n-1}$을 변형하여 $\dfrac{n}{a_{n+1}} - \dfrac{n-1}{a_n} \le a_n$ 을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(1-2) (1-1)의 결과로부터 $a_1+a_2+\cdots+a_n \ge \dfrac{n}{a_{n+1}}$을 얻는데, 이것은 단순 대입 후, 같은 항끼리 소거하면 쉽게 얻을 수 있다.

(1-3) 수학적 귀납법을 적용하여 부등식 $a_1+a_2+\cdots+a_n \ge n$이 성립함을 보이는 문제로 수학적 귀납법의 원리를 이해하고 주어진 명제를 증명하는 능력을 평가하는 문항으로 마지막 항 a_n이 1보다 작은 경우와 1이상인 경우로 구분하여 풀 수 있는지를 평가하고자 하였다.

6. 채점 기준

- 수열의 귀납적 정의에 대한 기본 지식
- 수열의 귀납적 원리의 이해하고 논리적, 체계적으로 명제를 증명하는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	간단한 대수적 조작으로 올바른 답을 구하면 6점	6점
(1-2)	간단한 대수적 조작으로 올바른 답을 구하면 7점	7점
(1-3)	수학적 귀납법의 올바른 구성하고 (i) $a_{k+1} \ge 1$인 경우을 보이면 3점	3점
	(ii) $a_{k+1} < 1$인 경우을 보이면 9점	9점

7. 예시 답안

(1−1) 주어진 부등식으로부터,

$$\frac{1}{a_{n+1}} \le \frac{{a_n}^2 + n - 1}{na_n} \Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}} \le a_n + \frac{n-1}{a_n}$$
$$\Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \le a_n$$

(1−2)

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &\ge \left(\frac{1}{a_2} - \frac{0}{a_1}\right) + \left(\frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n}\right) \quad ((1-1)\text{에 의해}) \\ &= \frac{n}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

(1−3) (1) $n = 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\ge a_1 + \frac{1}{a_1} \quad ((1-1)\text{에 의해}) \\ &\ge 2 \quad (\text{제시문(가)에 의해}) \end{aligned}$$

(2) $a_1 + \cdots + a_k \ge k$라 가정하자.

(i) $a_{k+1} \ge 1$이면 자명하다:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \ge k + 1$$

(ii) $a_{k+1} < 1$ 이면,

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} &\ge \frac{k}{a_{k+1}} + a_{k+1} \quad ((1-2)\text{에 의해}) \\ &= \frac{k-1}{a_{k+1}} + \left(\frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1}\right) \\ &> k - 1 + 2 = k + 1 \quad (\text{제시문(가)에 의해}) \end{aligned}$$

② 논술우수자 자연계(오후) 문항2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자(일반)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 오후 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 미적분 Ⅰ
	핵심개념 및 용어	극값, 도함수, 함수의 그래프의 개형
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가하다가 감소하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라 한다. 또 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하며, 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라 한다. 이때 극댓값과 극솟값을 모두 극값이라 한다.

(나) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
- 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.
- 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

(※) 상수 a,b에 대하여 4차 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^4-2(a+b)x^3+6abx^2+2a^2b^2x$ 라 하자.

(2-1) 함수 $f(x)$가 단 하나의 극값을 갖도록 하는 a,b의 순서쌍 (a,b)가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오. (15점)

(2-2) 집합 $\{\alpha \mid f(x)$는 $x=\alpha$에서 극값을 가진다$\}$의 원소가 서로 다른 세 음수이고, 두 수 $2a, 2b$가 정수인 a,b $(a<b)$의 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

다항함수(3,4차 함수)의 그래프의 개형을 도함수를 이용하여 파악할 수 있는지를 평가하고자 하였다

.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준 · 성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분 Ⅰ]-(다) 다항함수의 미분법-3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준	[미적분 Ⅰ]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증감, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 Ⅰ]-(다) 다항함수의 미분법-3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준	[미적분 Ⅰ]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증감, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
논제 2-1	교육과정	[수학 Ⅰ]-(다) 도형의 방정식-5 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다. [미적분 Ⅰ]-(다) 다항함수의 미분법-3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준	[수학 Ⅰ]-다. 도형의 방정식-5) 부등식의 영역 수학1351-2. 부등식 $f(x,y)>0$의 영역을 나타낼 수 있다. [미적분 Ⅰ]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증감, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
논제 2-2	교육과정	[수학 Ⅰ]-(다) 도형의 방정식-5 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다. [미적분 Ⅰ]-(다) 다항함수의 미분법-3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

	성취기준	[수학 Ⅰ]-다. 도형의 방정식-5) 부등식의 영역 수학1351-2. 부등식 $f(x,y)>0$의 영역을 나타낼 수 있다. [미적분 Ⅰ]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증감, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	김창동 외	교학사	2016	184-189
	미적분 Ⅰ	신항균 외	지학사	2016	115-124
기타					

5. 문항 해설

(2-1) 도함수 f'의 부호를 통해 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 하는 문항이다. f'' 이 하나의 근(중근)을 갖는 경우에 극값이 존재하지 않으므로 f가 단 하나의 극값을 갖기 위한 조건은 $f'(a),f'(b)\geq 0$ 또는 $f'(a),f'(b)\leq 0$ 인 경우이다. 그래프를 통해 표현하고 이 조건을 만족하는 영역을 좌표평면에 나타낼 수 있다.

(2-2) 그래프의 개형을 도함수를 통해 파악할 수 있는지를 평가하는 문항으로 4차함수가 극값을 서로 다른 3개의 음수에서 가질 조건을 정확히 파악할 수 있는지 평가하는 문제로 $f'(0)\geq 0$이므로 주어진 조건이 성립하는 것은 $a<b<0$이고 $f'(a)>0, f'(b)<0$일 때이다. 따라서, 문제의 순서쌍을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

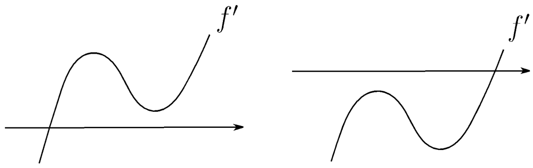
- 도함수의 통해 극값을 판별할 수 있는 능력
- 도함수의 부호를 알고 그 영역을 표현하는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	$f'(x), f''(x)$를 구하면 2점	2점
	$f'(a),f'(b)\geq 0$ 또는 $f'(a),f'(b)\leq 0$ 영역을 그림으로 설명하면 5점	5점

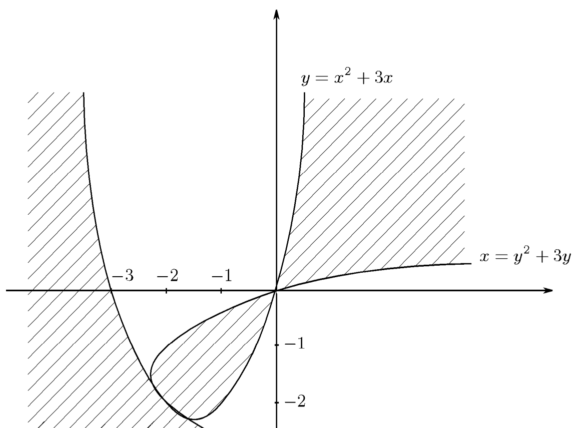
	$f'(a), f'(b)$의 값을 구하면 3점	3점
	좌표평면에 주어진 영역을 나타내면 5점	5점
(2-2)	주어진 조건을 만족하는 영역을 좌표평면에 나타내면 2점	2점
	순서쌍 1개당 2점	8점

7. 예시 답안

(2-1) $f'(x) = 4x^3 - 6(a+b)x^2 + 12abx + 2a^2b^2$, $f''(x) = 12(x-a)(x-b)$ 이다. 따라서, $a=b$이면 극값을 갖지 않고, $a \neq b$이면 $x=a$ 와 $x=b$에서 극값을 갖는다. 그러므로, $f(x)$가 단 하나의 극값을 가지려면, $f'(a), f'(b) \geq 0$ 또는 $f'(a), f'(b) \leq 0$이어야 한다. 즉, 다음과 같은 경우가 된다.

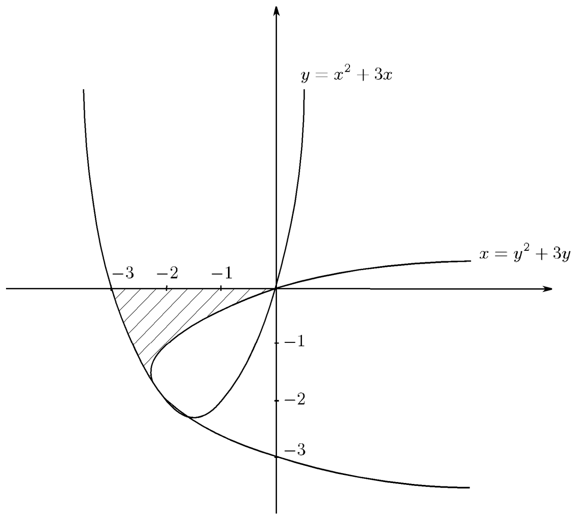


$f'(a) = 2a^2(-a+3b+b^2)$, $f'(b) = 2b^2(-b+3a+a^2)$ 이므로, 구하는 영역은 아래의 빗금친 부분이다.



(경계포함)

(2-2) $f'(0) \geq 0$ 이므로, 문제의 조건이 성립하는 것은 $a < b < 0$ 이고 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ 일 때이다.



(경계제외)

따라서, 구하는 순서쌍은 (-2.5,-1), (-2.5,-0.5), (-2,-0.5), (-1.5,-0.5) 이다.

③ 논술우수자 자연계(오후) 문항3

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자(일반)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 오후 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	공간벡터, 내적, 수직, 선분의 길이
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 공간 상의 세 점 O, A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 $\vec{b}-\vec{a}$로 나타 낼 수 있다. 또한, 선분 $\overline{AB}$를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

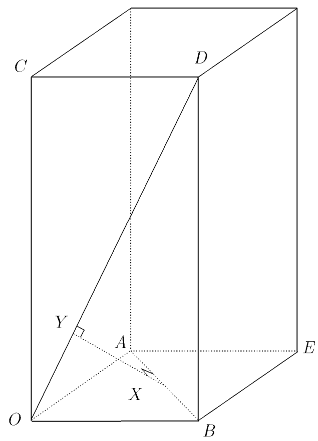
따라서, 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{OP}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b} \quad (0 \le t \le 1)$$

(나) 영 벡터가 아닌 두 벡터가 수직일 필요충분조건은 두 벡터의 내적이 0인 것이다. 한편, 벡터의 내적은 다음과 같이 분배법칙을 만족한다.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

(※) 그림과 같이 직육면체에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$이고 $\overline{OC}=2$이다. 직선 AB 위의 점 X, 직선 OD 위의 점 Y에 대하여, 벡터 $\overrightarrow{XY}$가 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{OD}$에 수직이다.



(3-1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$를

$$\overrightarrow{OX}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b},\quad \overrightarrow{OY}=s\overrightarrow{OD}=s(\vec{b}+\vec{c})$$

로 나타낼 때, 실수 t와 s의 값을 구하시오. (10점)

(3-2) 선분 XY의 길이를 구하시오. (5점)

(3-3) 직선 ℓ은 밑면 $OAEB$를 포함하는 평면에 놓여 있고, X를 지나며 직선 AB와 수직이다. 점 Y와 ℓ을 포함하는 평면이 주어진 직육면체를 자른 단면의 넓이를 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

공간벡터를 상황에 맞게 설정하고 이를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지 평가하고자 하였다. 또한 공간좌표를 써서도 문제 해결이 가능한 데, 이 경우에는 공간상의 평면과 직선의 식을 본 문제에 해결에 적절히 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준 · 성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-2 공간좌표 ③ 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-2) 공간좌표 기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내부점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-3 공간벡터 ① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. ② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-3) 공간벡터 기벡1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 기벡1332. 두 공간 벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
논제 3-1	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[3] 공간벡터 ① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. ② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-3) 공간벡터 기벡1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 기벡1332. 두 공간 벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
논제 3-2	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[2] 공간좌표 ② 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-2) 공간좌표 기벡1322. 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
논제 3-3	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[1] 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-1) 공간도형

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014	147-149
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	188-190
기타					

5. 문항 해설

(3-1),(3-2) 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{XY}$가 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{OD}$에 수직임과 벡터의 내적, 분배법칙 등을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{XY}$를 구하면 선분 XY의 길이를 구할 수 있다.

(3-3) 공간상의 직선과 평면사이의 위치관계를 파악하는 능력을 묻는 문항으로 Y와 직선 ℓ을 포함하는 평면이 직선 AB에 수직이고 OC, BD와 평행함을 알 수 있다. 이를 통해 단면이 직사각형임을 알 수 있고 넓이를 구할 수 있다.

6. 채점 기준

- 벡터의 수직관계와 벡터의 내적, 분배법칙을 이용하는 능력
- $\overrightarrow{XY}$를 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$로 표현하는 능력
- 직선과 평면의 위치관계를 밝히는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	수직관계를 보이는 과정에 벡터의 내적을 이용하여 계산하면 5점, 나머지 계산부분 5점	10점
(3-2)	$\overrightarrow{XY}$를 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$로 표현하면 3점, 벡터의 길이를 구하면 2점	5점
(3-3)	주어진 평면이 OC, BD에 평행함을 밝히면 5점	5점
	넓이를 구하면 5점	5점

7. 예시 답안

(3-1) $\overrightarrow{XY}=-t\vec{a}+(s-1+t)\vec{b}+s\vec{c}$ 이고 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{OD}$에 수직이므로

(1) $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{AB}=0$:

$(-t\vec{a}+(s-1+t)\vec{b}+s\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$으로부터 $(s-1+t)+t=0$ 이므로

$2t+s-1=0$

(2) $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{OD}=0$:

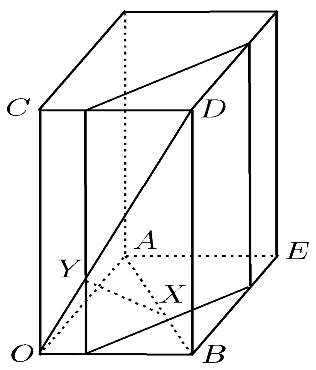
$(-t\vec{a}+(s-1+t)\vec{b}+s\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$으로부터 $(s-1+t)+4s=0$ 이므로

$t+5s-1=0$

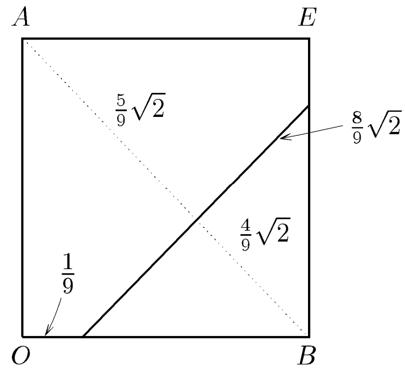
(1), (2)의 연립방정식을 풀면, $s=\frac{1}{9}$, $t=\frac{4}{9}$ 이다.

(3-2) $\overrightarrow{XY}=-\frac{4}{9}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}$ 이다. 이 벡터의 길이는 $\frac{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}{9}=\frac{\sqrt{36}}{9}=\frac{2}{3}$ 이므로 답은 $\frac{2}{3}$ 이다.

(3-3) 벡터 $\overrightarrow{XY}$의 밑변으로의 사영은 AB와 수직이므로, 점 Y 와 직선 ℓ을 포함하는 평면은 변 OC, BD 등과 평행하다. 따라서, 단면은 직사각형이 되고, 이것이 밑변의 길이는 $\frac{8}{9}\sqrt{2}$이고 높이는 2가 된다. 따라서, 넓이는 $\frac{16}{9}\sqrt{2}$ 이다.



C
D
A
E
Y
X
O
B



A
E
$\frac{5}{9}\sqrt{2}$
$\frac{8}{9}\sqrt{2}$
$\frac{4}{9}\sqrt{2}$
$\frac{1}{9}$
O
B

④ 논술우수자 자연계(오후) 문항4

1. 일반정보

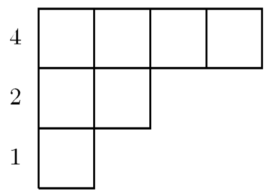
<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자(일반)</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열(수학) / 오후 4번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>자연수 분할, 부분집합</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

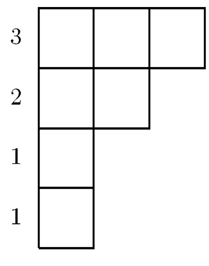
(가) 자연수를 순서를 생각하지 않고 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 하고, 특히 자연수 n을 k개의 자연수로 분할할 때, 이 분할의 수를 기호로 $P(n,k)$와 같이 나타낸다. (단, $n<k$ 이면 $P(n,k)=0$이다.)

(나) 자연수 7의 분할 4+2+1 은 다음과 같이 그림으로 표현할 수 있다.



$4+2+1$

위의 그림에서 가로와 세로를 바꾼 것을 생각하면, 자연수 분할 4+2+1로 부터 자연수 7의 분할 3+2+1+1을 얻는다.



$3+2+1+1$

(※) 자연수 전체의 집합을 $\mathrm{N}=\{1,2,3,...\}$이라 하자. 자연수 $n \geq 10$에 대하여 N의 부분집합 중 원소의 개수가 4이고 원소의 합이 n인 것의 개수를 a_n이라 하자. 자연수 $n \geq 1$에 대하여 n을 4이하인 자연수로 분할하는 경우의 수를 b_n 이라 하자. 예를 들어, $a_{10}=1$, $a_{11}=1$ 이고 $b_1=1$, $b_2=2$이다.

(4-1) a_{13}과 a_{15}의 값을 구하시오. (5점)

(4-2) b_4와 b_6의 값을 구하시오. (5점)

(4-3) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$b_n = P(n,1)+P(n,2)+P(n,3)+P(n,4)$$

(4-4) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$b_n = a_{n+10}$$

3. 출제 의도

자연수 분할을 이해하고 그 경우의 수를 계산할 수 있는지 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-3 분할 ② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3) 분할 확통1131. 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-3 분할 ② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3) 분할 확통1131. 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
논제 4-1	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-3 분할 ② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3) 분할 확통1131. 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.

논제 4-2	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-③ 분할 ② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3) 분할 확통1131. 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
논제 4-3	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-③ 분할 ② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3) 분할 확통1131. 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
논제 4-4	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-③ 분할 ② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3) 분할 확통1131. 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2016	70-75
	확률과 통계Ⅰ	황선욱 외	신사고	2016	47-48
기타					

5. 문항 해설

(4-1)&(4-2) 자연수 분할과 부분집합을 구체적으로 나열하여 가능한 경우의 개수를 셀 수 있는 지를 평가하는 문항이다.

(4-3)&(4-4) 제시문(나)에 의해 자연수 분할을 그림으로 표현하여 가로와 세로를 바꾸어 생각할 수 있는 지를 알아보고자 하는 문항으로 자연수 n을 4이하의 자연수의 분할하는 것과 대응이 된다. 따라서, b_n은 $P(n,1), P(n,2), P(n,3), P(n,4)$의 합으로 표현할 수 있다. 또한, a_{n+10}은 원소의 개수가 4이고, 원소의 합이 $n+10$인 N의 부분집합의 개수이므로 (4-3)의 결과를 이용하면 문제를 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

- 자연수 분할이해 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(4-1)	a_{13}: 2점, a_{15}: 3점	5점
(4-2)	b_4: 2점, b_6: 3점	5점
(4-3)	가로와 세로를 바꾸어 생각하여 b_n를 계산하면 5점	5점
(4-4)	a_{n+10}을 서로 다른 4개의 자연수 $n_1+n_2+n_3+n_4$로 분할됨을 표현하면 5점, 나머지 5점	10점

7. 예시 답안

(4-1) 원소의 개수가 4이고, 원소의 합이 13인 N의 부분집합은 다음과 같다.

$$\{1,2,3,7\} \qquad \{1,2,4,6\} \qquad \{1,3,4,5\}$$

원소의 개수가 4이고, 원소의 합이 15인 N의 부분집합은 다음과 같다.

$$\{1,2,3,9\}\ \{1,2,4,8\}\ \{1,2,5,7\}\ \{1,3,4,7\}\ \{1,3,5,6\}\ \{2,3,4,6\}$$

따라서 $a_{13}=3$ 이고, $a_{15}=6$이다.

(4-2) 자연수 4를 4이하인 자연수로 분할하는 경우는 다음과 같다.

$$4 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+1+1 \qquad 1+1+1+1$$

자연수 6를 4이하인 자연수로 분할하는 경우는 다음과 같다.

$4+2$	$4+1+1$	$3+3$
$3+2+1$	$3+1+1+1$	$2+2+2$
$2+2+1+1$	$2+1+1+1+1$	$1+1+1+1+1+1$

따라서 $b_4=5$ 이고, $a_6=9$ 이다.

(4-3) 제시문(나)에 의해 자연수 분할을 그림으로 표현하여 가로와 세로를 바꾸어 생각하면, 자연수 n을 4이하인 자연수로 분할하는 것은 자연수 n을 4개 이하의 자연수로 분할하는 것과 대응이 된다.

따라서 b_n은 다음의 경우의 합으로 표시할 수 있다.

(i) 자연수 n을 1개의 자연수로 분할하는 경우의 수: $P(n,1)$

(ii) 자연수 n을 2개의 자연수로 분할하는 경우의 수: $P(n,2)$

(iii) 자연수 n을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수: $P(n,3)$

(iv) 자연수 n을 4개의 자연수로 분할하는 경우의 수: $P(n,4)$

그러므로 $b_n=P(n,1)+P(n,2)+P(n,3)+P(n,4)$ 이 성립한다.

(4-4) a_{n+10}은 원소의 개수가 4이고, 원소의 합이 $n+10$인 N의 부분집합의 개수이다.
이것은 자연수 $n+10$을 서로 다른 4개의 자연수 $n_1+n_2+n_3+n_4$ 로 분할하는 것의 개수와 같다.

$$n+10=n_1+n_2+n_3+n_{4,} \qquad n_1>n_2>n_3>n_4\geq 1$$

다음과 같이 m_1, m_2, m_3, m_4를 정의하자.

$$m_1=n_1-4 \qquad m_2=n_2-3 \qquad m_3=n_3-2 \qquad m_4=n_4-1$$

이때 $m_1+m_2+m_3+m_4$는 자연수 n을 4개 이하의 자연수로 분할하는 것의 개수이다.

$$n=m_1+m_2+m_3+m_{4,} \qquad m_1\geq m_2\geq m_3\geq m_4\geq 0$$

따라서 다음이 성립한다.

$$a_{n+10}=P(n,1)+P(n,2)+P(n,3)+P(n,4)$$

(4-3)번의 결과에 의해 $a_{n+10}=b_n$이 성립한다.