2017학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오후)

자연계열 (120분)

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 문항 당 25점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).

※ **답안지는 절대 교체할 수 없습니다.**

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 양의 실수 a에 대하여 $a+\frac{1}{a}\geq 2$이다.

(나) 어떤 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n\geq 2$에 대하여 성립함을 증명할 때, 수학적 귀납법을 이용하려면 다음 두 가지를 보여야 한다.

(i) $n=2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k\geq 2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 부등식을 만족한다.

$$a_{n+1}\geq \frac{na_n}{{a_n}^2+n-1}\quad (n=1,2,3,...)$$

(1-1) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (6점)

$$\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n}\leq a_n$$

(1-2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (7점)

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq \frac{n}{a_{n+1}}$$

(1-3) 수학적 귀납법을 이용하여, 모든 자연수 $n\geq 2$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (12점)

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n$$

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가하다가 감소하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라 한다. 또 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하며, 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라 한다. 이때 극댓값과 극솟값을 모두 극값이라 한다.

(나) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

- 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.
- 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

(※) 상수 a, b에 대하여 4차 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^4-2(a+b)x^3+6abx^2+2a^2b^2x$라 하자.

(2-1) 함수 $f(x)$가 단 하나의 극값을 갖도록 하는 a, b의 순서쌍 (a,b)가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오. (15점)

(2-2) 집합 $\left\{\alpha \,\middle|\, f(x)\text{는 } x=\alpha\text{에서 극값을 가진다}\right\}$의 원소가 서로 다른 세 음수이고, 두 수 $2a$, $2b$가 정수인 a, b $(a<b)$의 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오. (10점)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 공간 상의 세 점 O, A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 $\vec{b} - \vec{a}$로 나타낼 수 있다. 또한, 선분 AB를 $m : n \ (m > 0, n > 0)$으로 내분하는 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

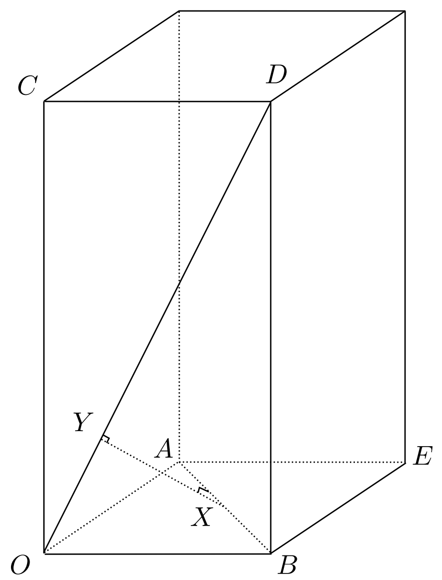
따라서, 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{OP} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad (0 \le t \le 1)$$

(나) 영 벡터가 아닌 두 벡터가 수직일 필요충분조건은 두 벡터의 내적이 0인 것이다. 한편, 벡터의 내적은 다음과 같이 분배법칙을 만족한다.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(※) 그림과 같이 직육면체에서 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$이고 $\overline{OC} = 2$이다. 직선 AB 위의 점 X, 직선 OD 위의 점 Y에 대하여, 벡터 $\overrightarrow{XY}$가 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{OD}$에 수직이다.



(3-1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$를

$$\overrightarrow{OX} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{OY} = s\overrightarrow{OD} = s(\vec{b} + \vec{c})$$

로 나타낼 때, 실수 t와 s의 값을 구하시오. (10점)

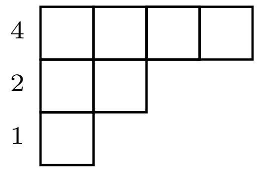
(3-2) 선분 XY의 길이를 구하시오. (5점)

(3-3) 직선 ℓ은 밑면 $OAEB$를 포함하는 평면에 놓여 있고, X를 지나며 직선 AB와 수직이다. 점 Y와 ℓ을 포함하는 평면이 주어진 직육면체를 자른 단면의 넓이를 구하시오. (10점)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

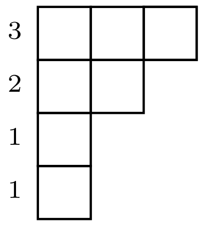
(가) 자연수를 순서를 생각하지 않고 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라고 하고, 특히 자연수 n을 k개의 자연수로 분할할 때, 이 분할의 수를 기호로 $P(n,k)$와 같이 나타낸다. (단, $n<k$이면 $P(n,k)=0$이다.)

(나) 자연수 7의 분할 $4+2+1$은 다음과 같이 그림으로 표현할 수 있다.



$4+2+1$

위의 그림에서 가로와 세로를 바꾼 것을 생각하면, 자연수 분할 $4+2+1$로 부터 자연수 7의 분할 $3+2+1+1$을 얻는다.



$3+2+1+1$

(※) 자연수 전체의 집합을 $\mathrm{N}=\{1,2,3,\ldots\}$이라 하자. 자연수 $n\geq 10$에 대하여 N의 부분집합 중 원소의 개수가 4이고 원소의 합이 n인 것의 개수를 a_n이라 하자. 자연수 $n\geq 1$에 대하여 n을 4 이하인 자연수로 분할하는 경우의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_{10}=1$, $a_{11}=1$ 이고 $b_1=1$, $b_2=2$이다.

(4-1) a_{13}과 a_{15}의 값을 구하시오. (5점)

(4-2) b_4와 b_6의 값을 구하시오. (5점)

(4-3) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$b_n=P(n,1)+P(n,2)+P(n,3)+P(n,4)$$

(4-4) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$b_n=a_{n+10}$$

<연 습 장>