2017학년도 논술우수자_자연계열 (오전)

① 논술우수자 자연계(오전) 문항1

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 일반(오전)</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열(수학) / 오전 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>복소수, 이항 계수, 이항 정리</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 복소수 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 하나의 해로서 $\omega^3=1$이 성립한다.

(나) 이항정리에 의해 모든 자연수 n과 복소수 α에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$(1+\alpha)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\alpha + {}_n\mathrm{C}_2\alpha^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\alpha^n$$

(※) 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 이항계수의 합으로 정의된다. 이때, m은 $\frac{n}{3}$을 넘지 않는 최대 정수이다.

$$a_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_6 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{3m}$$

(1-1) $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$일 때, 음이 아닌 정수 k에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\begin{cases}1, & k\text{가 }3\text{의 배수일 때}\\ 0, & k\text{가 }3\text{의 배수가 아닐 때}\end{cases}$$

(1-2) 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$a_n=\frac{2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3}$$

(1-3) 자연수 n이 3의 배수일 때, $\left|a_n-\frac{2^n}{3}\right|$의 값을 구하시오. (5점)

(1-4) 자연수 n이 3의 배수가 아닐 때, $\left|a_n-\frac{2^n}{3}\right|$의 값을 구하시오. (5점)

3. 출제 의도

이항계수의 합을 이항정리를 이용하여 대수적으로 표현하고 제시문을 문제해결에 적용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] "수학과 교육과정", 성취기준: "2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준 · 성취수준: 고등학교 수학")

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[수학 I]-(나) 방정식과 부등식-1 복소수와 이차방정식 ① 복소수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.
	성취기준	[수학 I]-나. 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 수학1211. 복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-4 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-4) 이항정리 확통1141/1142. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	[수학 I]-(나) 방정식과 부등식-1 복소수와 이차방정식 ① 복소수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.
	성취기준	[수학 I]-나. 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 수학1211. 복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-4 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-4) 이항정리

		확통1141/1142. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
논제 1-3	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-④ 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-4) 이항정리 확통1141/1142. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
논제 1-4	교육과정	[확률과 통계]-(가) 순열과 조합-④ 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-4) 이항정리 확통1141/1142. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2016	47-61
	확률과 통계	이준역 외	천재교육	2016	63-64
	확률과 통계	황선욱 외	신사고	2016	38-42
기타					

5. 문항 해설

(1-1) 제시문(가)의 $\omega=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$가 $1+\omega+\omega^2=0$, $\omega^3=1$임을 활용하여 k가 3의 배수인 경우와 3의 배수가 아닌 경우로 나누어 $1+\omega^k+\omega^{2k}$를 구할 수 있다.

(1-2) $2^n=(1+1)^n, (1+\omega)^n, (1+\omega^2)^n$를 이항정리를 이용하여 표현하고 (1-1)의 결과를 적용하는 과정에서 식을 정리하는 능력을 평가하는 문항이다.

(1-3) 3의 배수인 경우 $1+\omega^n+\omega^{2n}=3$인 사실을 (1-2)의 결과에 적용하여 구할 수 있다.

(1-4) 3의 배수가 아닌 경우 $1+\omega^n+\omega^{2n}=0$인 사실을 (1-2)의 결과에 적용하여 구할 수 있다.

6. 채점 기준

- 이항정리 및 이항계수의 기본 성질의 이해능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	k의 값에 따라 $1+\omega^k+\omega^{2k}$의 계산과정에서 $1+\omega+\omega^2=0$을 정확하게 이용하면 5점	5점
(1-2)	이항정리를 이용하여 $2^n=(1+1)^n$, $(1+\omega)^n$, $(1+\omega^2)^n$의 계산이 맞으면 5점	5점
	(1-1)를 적용하여 식을 완성하면 5점	5점
(1-3)	$1+\omega+\omega^2=0$ 임과 (1-2)의 결과를 이용하여 $a_n-\dfrac{2^n}{3}$를 정확하게 계산하고 3의 배수일 때, (1-1)의 결과 $1+\omega^n+\omega^{2n}=3$를 적용하여 답을 구하면 5점	5점
(1-4)	$1+\omega+\omega^2=0$ 임과 (1-2)의 결과를 이용하여 $a_n-\dfrac{2^n}{3}$를 정확하게 계산하고 3의 배수가 아닐 때, (1-1)의 결과 $1+\omega^n+\omega^{2n}=0$를 적용하여 답을 구하면 5점	5점

7. 예시 답안

(1-1) 제시문(가)에 의해, $1+\omega+\omega^2=0$이고 $\omega^3=1$ 이다.

(i) $k=0$이면 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\frac{1+\omega^0+\omega^0}{3}=\frac{1+1+1}{3}=1$$

(ii) $k=1$이면 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\frac{1+\omega^1+\omega^2}{3}=\frac{0}{3}=0$$

(iii) $k=2$이면 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\frac{1+\omega^2+\omega^4}{3}=\frac{1+w^2+w^1}{3}=0$$

$\omega^3=1$이므로 $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}$은 k에 따라 3의 주기로 순환하므로 다음이 성립한다.

$$\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\begin{cases}1, & k\text{가 }3\text{의 배수일 때}\\ 0, & k\text{가 }3\text{의 배수가 아닐 때}\end{cases}$$

(1-2) 제시문(나) (이항정리)에 의해

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k,\ \ (1+\omega)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\omega^k,\ \ (1+\omega^2)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\omega^{2k}$$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\omega^k + \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\omega^{2k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}\right) \quad ((1-1)\text{의 결과를 적용}) \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_6 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{3m} \\ &= a_n\end{aligned}$$

(1-3) $1+\omega+\omega^2=0$이므로 (1-2)번의 결과에 의해서 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}a_n - \frac{2^n}{3} &= \frac{(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3} \\ &= \frac{(-\omega^2)^n+(-\omega)^n}{3} \\ &= (-1)^n\left(\frac{\omega^{2n}+\omega^n}{3}\right) \\ &= (-1)^n\left(\frac{1+\omega^n+\omega^{2n}}{3} - \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

n이 3의 배수일 때, (1-1)번의 결과에 의해 $1+\omega^n+\omega^{2n}=3$이므로,

$$\left|a_n - \frac{2^n}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

(1-4) $1+\omega+\omega^2=0$이므로 (1-2)번의 결과에 의해서 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}a_n - \frac{2^n}{3} &= \frac{(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3} \\ &= \frac{(-\omega^2)^n+(-\omega)^n}{3} \\ &= (-1)^n\left(\frac{\omega^{2n}+\omega^n}{3}\right) \\ &= (-1)^n\left(\frac{1+\omega^n+\omega^{2n}}{3} - \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

n이 3의 배수가 아닐 때, (1-1)번의 결과에 의해 $1+\omega^n+\omega^{2n}=0$이므로,

$$\left|a_n - \frac{2^n}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

② 논술우수자 자연계(오전) 문항2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자(일반)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 오전 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	평면, 직선, 삼수선의 정리
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

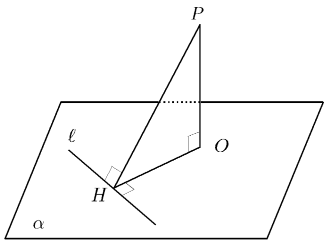
다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 평면을 결정한다.

(나) 직선 ℓ이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m,n의 교점 O를 지나고 m,n과 각각 수직이면 직선 ℓ은 평면 α에 수직이다.

(다) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 ℓ, 직선 ℓ 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 ℓ 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음의 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라고 한다.

(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\ell$ 이면 $\overline{PH}\perp\ell$ 이다.
(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp\ell$ 이면 $\overline{OH}\perp\ell$ 이다.
(3) $\overline{PH}\perp\ell$, $\overline{OH}\perp\ell$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$ 이면 $\overline{PO}\perp\alpha$ 이다.



(※) 평면 α와 평면 α 위에 있지 않은 두 점 P, Q가 주어졌다. (단, 직선 PQ는 α와 수직이 아니다.) 점 P를 지나고 직선 PQ에 수직인 평면을 α'라 두고 α와 α'의 교선을 ℓ이라 하자. 점 Q에서 α에 내린 수선의 발을 R이라 하고, R에서 ℓ에 내린 수선의 발을 S라 하자.

(2-1) 선분 PS와 ℓ이 수직임을 보이시오. (5점)

(2-2) 네 점 P,Q,R,S는 같은 평면에 있음을 보이시오. (10점)

(2-3) 좌표공간의 점 P, Q에 대하여 Q의 좌표가 $(2,3,4)$이고, α가 xy평면이라 하자. 직선 ℓ의 방정식이 $x+2y=6$, $z=0$일 때, $\triangle PRS$의 외접원의 반지름을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

평면의 결정조건, 평면과 직선의 수직관계, 삼수선의 정리들을 이해하고 이를 적용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준 · 성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[1] 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-1) 공간도형 기벡1311. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[1] 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-1) 공간도형 기벡1311. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[1] 공간도형 ② 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준	기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제 2-1	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-[1] 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. ② 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-1) 공간도형 기벡1311. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계

		계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. 기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제 2-2	교육과정	[기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-1 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. ② 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-1) 공간도형 기벡1311. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. 기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제 2-3	교육과정	[수학 I]-(다) 도형의 방정식-2 직선의 방정식 ③ 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있다. [기하와 벡터]-(다) 공간도형과 공간벡터-2 공간좌표 ① 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준	[수학 I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식 수학1323. 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있다. [기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-2) 공간좌표 기벡1321. 좌표공간에서 점과 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외	(주) 좋은책 신사고	2016	139-141
	기하와 벡터	류희한 외	천재교육	2016	128-142
	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	122-136
기타					

5. 문항 해설

(2-1) 제시문(다)의 삼수선의 정리를 활용하여 직선과 직선, 직선과 평면의 수직관계를 파악할 수 있는 능력을 평가하는 문항이다.

(2-2) 제시문(가)에 의해 평면의 존재성을 파악하고 점 Q,R,S와 Q,P,S를 포함하는 두 평면이 같음을 제시문 (나)를 이용하여 논리적으로 서술하고 네 점이 한 평면에 있음을 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다.

(2-3) 사각형 $PQRS$에서 $\angle QPS = \angle QRS$가 직각이라는 사실로부터 점 P, Q, R, S이 QS를 지름으로 하는 원임을 파악할 수 있고, 이 원이 $\triangle PRS$의 외접원임을 인지하고 공간상의 점 Q와 R를 공간좌표로 표현하고 한 평면에 있는 직선과 점사이의 거리를 구하여 반지름을 구할 수 있다.

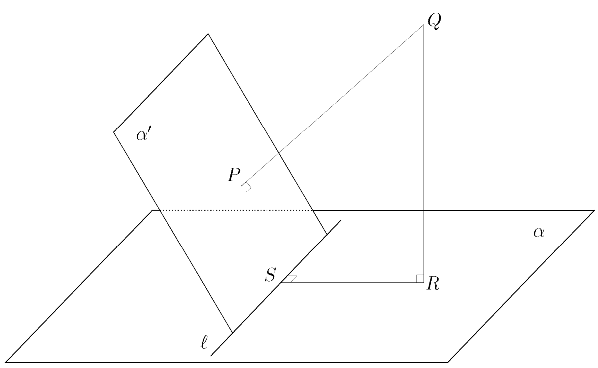
6. 채점 기준

- 삼수선의 정리이해와 적용능력
- 직선과 직선, 직선과 평면의 위치관계 파악능력
- 공간상의 좌표표현 능력, 한 점과 직선사이의 거리계산, 외접원의 지름 인지능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	삼수선이 정리를 이용하여 $\overline{QS}\perp\ell$ 와 $\overline{PS}\perp\ell$ 임을 보이면 5점. ($\overline{QS}\perp\ell$ 만 보인 경우는 2점)	5점
(2-2)	네 점이 평면위에 있다는 설정을 제시하면 3점	3점
	제시문(나)를 이용하여 두 평면이 같음을 보이면 7점	7점
(2-3)	P, Q, R, S가 QS를 지름으로 하는 원에 놓여있고 이 원이 $\triangle PRS$의 외접원임을 보이면 4점	4점
	평면의 점 $R(2,3,0)$에서 직선 ℓ까지의 거리를 구하고 반지름을 구하면 6점	6점

7. 예시 답안

아래 그림을 생각하자.



(2-1) $\overline{QR}\perp\alpha$, $\overline{RS}\perp\ell$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{QS}\perp\ell$ 이다. $\overline{PQ}\perp\alpha'$, $\overline{QS}\perp\ell$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PS}\perp\ell$ 이다.

(2-2) 점 Q, R, S를 포함하는 평면을 β라 하고, 점 Q, P, S를 포함하는 평면을 γ라 한 후 $\beta=\gamma$ 임을 보이자. (제시문(가)에 의해 이러한 평면이 존재한다.)

$\ell\perp\overline{RS}$, $\ell\perp\overline{QS}$이므로 제시문(나)에 의해 $\ell\perp\beta$ 이다. 즉 β는 ℓ과 수직이고 S를 지난다. 같은 방법으로 $\ell\perp\overline{PS}$, $\ell\perp\overline{QS}$이므로 $\ell\perp\gamma$ 이다. 즉 γ는 ℓ과 수직이고 S를 지난다. $\therefore\ \beta=\gamma$

(2-3) 사각형 $PQRS$에서 $\angle QPS=\angle QRS$가 직각이다. 따라서 P,Q,R,S는 QS를 지름으로 하는 원에 놓여 있고, 이 원이 $\triangle PRS$의 외접원이다. 여기서 $Q(2,3,4)$이므로 $R(2,3,0)$이다. xy평면의 점 $(2,3,0)$에서 직선 $x+2y=6$에 이르는 거리는 $\overline{RS}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

$\therefore\ \overline{QS}=\sqrt{\frac{84}{5}}$ 이고 구하는 반지름은 $\frac{\sqrt{105}}{5}$ 이다.

③ 논술우수자 자연계(오전) 문항3

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 (일반)</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열(수학) / 오전 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 수학 II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>조건, 명제, 진리집합</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 'x는 6의 약수이다.', '$x=2x-1$'과 같이 변수 x를 포함한 문장이나 식의 참, 거짓이 x의 값에 따라 판별될 때, 그 문장이나 식을 조건이라고 한다. 또, 전체집합 U의 원소 중에서 조건을 참이 되게 하는 x의 값의 집합을 그 조건의 진리집합이라고 한다.

(나) 명제 $p \to q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때
- $P \subset Q$ 이면 명제 $p \to q$는 참이다.
- $P \not\subset Q$ 이면 명제 $p \to q$는 거짓이다.

(※) a,b가 상수일 때, 실수의 집합을 전체집합으로 하는 조건 p,q,r이 다음과 같다.

p : $x > a-b$ 이고 $x < b-a$ 이다.

q : $x > a-b$ 이고 $x < b-a$ 이며, x는 정수이다.

r : $x \geq a+1$ 또는 $x \leq b-2$ 이다.

(3-1) 조건 p의 진리집합이 공집합일 때, 두 상수 a,b가 만족하는 부등식을 구하시오. (5점)

(3-2) 명제 $p \to r$이 거짓이 되도록 하는 정수 a,b의 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오. (10점)

(3-3) 명제 $q \to r$이 거짓이 되도록 하는 정수 a,b의 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 다루는 조건의 진리집합을 이해하는지, 명제의 참/거짓을 진리집합의 포함관계를 이용하여 판단할 수 있는지 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준(교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[수학 II]-(가) 집합과 명제-2 명제 ① 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-가. 집합과 명제-2) 명제 수학2121. 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
제시문 (나)	교육과정	[수학 II]-(가) 집합과 명제-1 집합 ① 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [수학 II]-(가) 집합과 명제-2 명제 ① 명제와 조건의 뜻을 알고, `모든‘, `어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-가. 집합과 명제-1) 집합 수학2112. 두 집합 사이의 표함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. [수학 II]-가. 집합과 명제-2) 명제 수학2121. 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
논제 3-1	교육과정	[수학 I]-(다) 도형의 방정식-수 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준	[수학 I]-다. 도형의 방정식-5) 부등식의 영역 수학1351-1. 부등식 $y>f(x)$의 영역을 나타낼 수 있다.
논제 3-2	교육과정	[수학 II]-(가) 집합과 명제-1 집합 ① 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [수학 II]-(가) 집합과 명제-2 명제 ① 명제와 조건의 뜻을 알고, `모든‘, `어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-가. 집합과 명제-1) 집합 수학2112. 두 집합 사이의 표함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. [수학 II]-가. 집합과 명제-2) 명제 수학2121. 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.

논제 3-3	교육과정	[수학 II]-(가) 집합과 명제-1 집합 ① 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. [수학 II]-(가) 집합과 명제-2 명제 ① 명제와 조건의 뜻을 알고, `모든 ‘, `어떤’ 을 포함한 명제를 이해한다.
	성취기준	[수학 II]-가. 집합과 명제-1) 집합 수학2112. 두 집합 사이의 표함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. [수학 II]-가. 집합과 명제-2) 명제 수학2121. 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	정상권 외	금성출판사	2014	192-198
	수학 II	신항균 외	지학사	2016	42-48
	수학 II	김원경 외	비상교육	2016	35-41
기타					

5. 문항 해설

(3-1) 조건 p의 진리집합이 공집합이 될 조건을 이해하고 이 조건을 만족하는 부등식 영역의 의미를 이해하고 있는지를 평가하는 문항이다.

(3-2)&(3-3) 부등식으로 이루어진 두 조건 p,q로 이루어진 명제 $p \rightarrow q$의 진리집합사이의 포함관계를 이해하고 거짓일 조건의 부등식의 영역을 분석하고 주어진 부등식을 만족하는 영역에서 정수의 순서쌍을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이 때, 참이 되는 경우를 고려하고 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

- 부등식의 영역의 의미를 파악하는 능력
- 진리집합사이의 포함관계 이해능력
- 명제와 조건의 뜻을 알고, 적용하는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	p의 진리집합이 공집합이 될 조건을 부등식으로 표현하면 5점	5점
(3-2)	참이 되는 세 가지 경우의 부등식의 영역을 나타내면 3점	3점
	거짓이 되는 영역에서 정수의 순서쌍을 구하면 7점 (1개당 1점, 틀리면 -1점 감점)	7점
(3-3)	참이 되는 세 가지 경우의 부등식의 영역을 나타내면 5점	5점
	거짓이 되는 영역에서 정수의 순서쌍을 구하면 5점	5점

7. 예시 답안

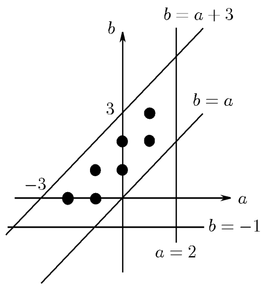
(3-1) 조건 p의 진리집합이 공집합이려면 $b-a \le a-b$ 이어야 한다.
따라서, 구하는 부등식은 $a \ge b$ 이다.

(3-2) 조건 p의 진리집합을 P, 조건 r의 진리집합을 R이라 하면, $P \subset R$ 인 경우는 다음 세 가지 경우 중의 하나가 성립할 때이다.

(1) $P = \varnothing$인 경우: $a \ge b$인 경우이다.

(2) R이 실수 전체의 집합인 경우: $b-2 \ge a+1$. 즉, $b \ge a+3$인 경우이다.

(3) $P=(a-b, b-a)$, $R=(-\infty, b-2] \cup [a+1, \infty)$이고, $b-a \le b-2$ 또는 $a-b \ge a+1$ 인 경우: $a \ge 2$ 또는 $b \le -1$인 경우이다.



$p \rightarrow r$이 거짓인 경우는 (a,b)가 위 그림에서 사다리꼴 내부에 있을 때이다.
따라서, 구하는 순서쌍은 $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,3)$ 이다.

(3-3) 조건 q의 진리집합을 Q라고 하면, 정수 $a<b$에 대하여 $Q=\{x \mid x$는 정수이고 $a-b+1 \le x \le b-a-1\}$ 이다.
한편, 모든 정수가 R의 원소인 것은 $(b-2)+1 \ge a+1$. 즉, $b \ge a+2$일 때이다.
따라서, $Q \subset R$인 경우는 다음 세 가지 경우 중 하나가 성립할 때이다.

(1) $a \geq b$, (2) $b \geq a+2$, (3) $b-a-1 \leq b-2$ 또는 $a-b+1 \geq a+1$
즉, 구하려는 순서쌍은 (1)’ $a < b$, (2)’ $b < a+2$, (3)’ $a < 1$ 이고 $b > 0$ 을 모두 만족해야 한다.
(3-2)에서 구한 순서쌍 중 이 세 조건을 모두 만족하는 것은 $(0,1)$ 뿐이다.

④ 논술우수자 자연계(오전) 문항4

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자(일반)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 오전 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	부등식, 함수의 증가와 감소, 지수함수와 로그함수, 정적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 연속이고 $f(x) \le g(x)$ 이면 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

(나) 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고 $g(x) \ge 0$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}g(x)\right) = e^{-x}\left(g'(x) - g(x)\right)$$

(다) 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고 $g(x) > 0$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

(※) 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 미분가능하다.

(4-1) 실수 $0 \le x \le 3$ 에 대하여 $f'(x) \ge 0$ 이고, $f(0) = 1$, $f(3) = 2$ 인 함수 $f(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$1 \le \int_1^2 f(x)\,dx \le 2$$

(4-2) 실수 $x \ge 0$ 에 대하여 $g'(x) \ge g(x)$ 이고 $g(0) = 1$ 일 때, $x \ge 0$ 에서 $g(x) \ge e^x$ 임

을 보이시오. (10점)

(4-3) 실수 $0 \le x \le 3$ 에 대하여 $g'(x) \ge g(x)$ 이고, $g(0)=1$, $g(3)=e^4$ 인 함수 $g(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\frac{3}{2} \le \int_1^2 \ln g(x)\, dx \le \frac{5}{2}$$

3. 출제 의도

도함수의 부호로부터 함수의 증감을 판정하고, 이를 이용하여 함수들의 대소 관계를 분석하여 이를 정적분의 대소 관계로 유도하는 종합적인 능력을 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 및 관련 성취기준 (교육과정: 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책] “수학과 교육과정”, 성취기준: “2009년 개정 교육과정에 따른 성취기준・성취수준: 고등학교 수학”)

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분 Ⅰ]-(라) 다항함수의 적분법-③ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준	[미적분 Ⅰ]-라. 다항함수의 적분법-3) 정적분의 활용 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 Ⅱ]-(가) 지수함수와 로그함수-② 지수함수와 로그함수의 미분 ② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
	성취기준	[미적분 Ⅱ]-가. 지수함수와 로그함수-2) 지수함수와 로그함수의 미분 미적2122. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[미적분 Ⅱ]-(가) 지수함수와 로그함수-② 지수함수와 로그함수의 미분 ② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
	성취기준	[미적분 Ⅱ]-가. 지수함수와 로그함수-2) 지수함수와 로그함수의 미분 미적2122. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
논제 4-1	교육과정	[미적분 Ⅰ]-(다) 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분 Ⅰ]-(라) 다항함수의 적분법-③ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준	[미적분 Ⅰ]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분 Ⅰ]-라. 다항함수의 적분법-3) 정적분의 활용 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
논제 4-2	교육과정	[미적분 Ⅰ]-(다) 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용

		③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준	[미적분 I]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
논제 4-3	교육과정	[미적분 II]-(라) 적분법-1 여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준	[미적분 II]-라. 적분법-1) 여러 가지 적분법 미적2413-1. 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	정상권 외	금성출판사	2014	125-127
	미적분 II	김창동 외	교학사	2014	184-193
기타					

5. 문항 해설

(4-1) 도함수가 양이라는 조건에서 함수가 증가한다는 사실을 확인하고 제시문(가)의 두 함수사이에 주어진 영역의 넓이를 정적분의 부등식관계로 나타낼 수 있음을 적용하여 부등식을 보이는 문항이다.

(4-2) 제시문(나)의 지수함수와 관련된 함수의 도함수 공식을 활용하여 $h(x)=e^{-x}g(x)$가 증가함수임을 보이고 $h(0)\geq 1$임을 이용하여 부등식관계를 보일 수 있다.

(4-3) (4-2)에 얻은 부등식과 제시문(다)의 로그함수의 미분 공식으로부터 $\ln g(x)\geq x$임을 알 수 있고 조건 $g(3)=e^4$를 이용하여 $\ln g(x)\leq x+1$ 임을 얻을 수 있다. 여기에 제시문(가)의 정적분의 성질을 이용하여 부등식관계를 보일 수 있다.

6. 채점 기준

• 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

하위 문항	채점 기준	배점
(4-1)	$f'(x) \ge 0$로부터 증가함수임을 확인하고 제시문(가)를 이용하여 부등식을 보이면 5점 (그림으로 설명해도 5점)	5점
(4-2)	$h(x) = e^{-x}g(x)$가 증가함수임을 보이면 5점	5점
	h가 증가함수와 $h(x) \ge h(0) = 1$임을 이용하여 부등식을 보이면 5점	5점
(4-3)	동치인 두 조건 $e^{-x} \le g(x) \le e^{x+1}$, $x \le \ln g(x) \le x+1$ 중 하나를 확인한 경우	5점
	제시문(가)를 이용하여 적분값을 계산하면 5점	5점

7. 예시 답안

(4-1) $f'(x) \ge 0$에서 $f(x)$는 증가함수이다. 따라서, $0 \le x \le 3$인 x에 대하여

$$1 = f(0) \le f(x) \le f(3) = 2$$

이다. 이제 제시문(가)에 의하여

$$1 = \int_1^2 1dx \le \int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 2dx \le 2$$

이다.

(4-2) $h(x) = e^{-x}g(x)$라 두고, 제시문(나)를 이용하면

$$h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) \ge 0$$

이다. 따라서 $h(x)$는 증가함수이고, 모든 $x \ge 0$에 대하여 $h(x) \ge h(0) = 1$이다. 그러므로 $g(x) = e^x h(x) \ge e^x$이다.

(4-3) (4-2)의 풀이과정에서 $h(x) = e^{-x}g(x)$는 증가함수이므로, $0 \le x \le 3$일 때 $1 \le h(x) \le h(3) = e$ 이다. 따라서 $e^x \le g(x) \le e^{x+1}$이고 여기에 증가함수인 $\ln$ 를 적용하면, $x \le \ln g(x) \le x+1$이다.

이제 (4-1)에서와 같이 제시문(가)에 의하여

$$\frac{3}{2} = \int_1^2 xdx \le \int_1^2 \ln g(x)dx \le \int_1^2 x+1dx = \frac{5}{2}$$

이다.