2016학년도 모의고사

논술고사 문제지(1차)

(자연계열) : 120분

학 교 명		전형유형	논술우수자
학년 (반)		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 각 문항의 답안은 반드시 해당 답란에 작성하시오.
3. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

수열을 정의할 때, 수열의 일반항을 구체적인 식으로 나타내기도 하지만 이웃하는 항들 사이의 관계식을 써서 수열을 정의하기도 한다. 일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 에서

(1) 첫째항 a_1 의 값

(2) 두 항 a_n, a_{n+1} $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 사이의 관계식

이 주어질 때, 이 관계식의 n 에 $1, 2, 3, \cdots$ 을 차례로 대입하면 수열의 모든 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이 정해진다. 이와 같이 첫째항 a_1 의 값과 이웃하는 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 하고, 그 관계식을 수열의 점화식이라고 한다.

(※) 수열 $\{a_n\}$ 은 초항이 $a_1 = k$ (k 는 실수)이고 점화식

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} & (a_{n-1} \geq n \text{ 인 경우}) \\ 2n - a_{n-1} & (a_{n-1} < n \text{ 인 경우}) \end{cases}$$

을 만족한다.

(1-1) $a_5 = 5$ 가 되도록 하는 k 의 값을 모두 구하시오. (10점)

(1-2) $a_1 + a_2 + a_3 \leq 10$ 이 되도록 하는 k 의 범위를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

양의 정수 n 과 $1 \le k \le n-1$ 인 정수 k 에 대하여, 조합의 수 ${}_nC_k$ 의 정의에서 등식

$$ {}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1} $$

가 성립한다. 위 등식을 파스칼의 공식이라고 한다. 파스칼의 공식이 성립하는 이유는 다음과 같다. 주어진 n 개의 대상 중에서 어느 한 대상 S 에 표시를 하자. 이때, S 를 포함하여 k 개를 택하는 방법의 수는 S 를 제외한 $n-1$ 개에서 S 를 제외한 나머지 $k-1$ 개를 택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_{n-1}C_{k-1}$ 가지이다. 또, S 를 포함하지 않는 k 개를 택하는 방법의 수는 $n-1$ 개에서 k 개를 택하는 방법의 수이므로 ${}_{n-1}C_k$ 가지이다. 따라서 합의 법칙에 의하여 ${}_{n-1}C_{k-1}$ 과 ${}_{n-1}C_k$ 를 합한 것이 n 개의 대상에서 k 개를 택하는 조합의 수 ${}_nC_k$ 가 된다.

(※) 양의 정수 n 에 대하여, m 은 $\frac{n}{2}$ 의 정수부분의 값이라 할 때, f_n 은 다음과 같이 정의된다.

$$ f_n = \sum_{k=0}^{m} {}_{n-k}C_k = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \cdots + {}_{n-m}C_m $$

(2-1) $f_1 = 1$, $f_2 = 2$ 임을 보이시오. (5점)

(2-2) 모든 $n \ge 3$ 에 대해, 관계식 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 이 성립함을 보이시오. (10점)

(2-3) 모든 $n \ge 1$ 에 대해, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 2$ 임을 보이시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를 가질 때, 관계식 $f(g(x))=x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면, 합성함수의 미분법에 의하여

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

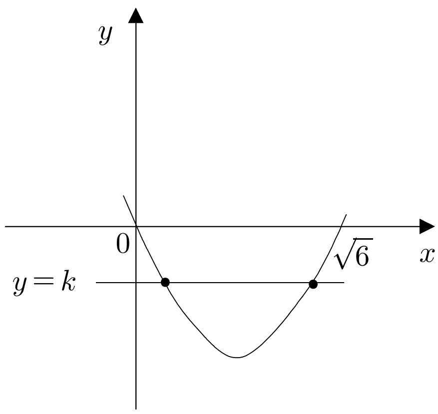
이 된다. 실제로 $f'(g(x))$가 0이 아닌 경우 $g(x)$ 는 미분가능하며, 위 등식으로부터

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

임을 알 수 있다.

(3-1) 곡선 $y=x^3-6x$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위를 구하시오. (10점)

(3-2) 곡선 $y=x^3-6x$ 의 $0<x<\sqrt{6}$ 인 부분과 직선 $y=k$ 가 아래 그림과 같이 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 하자. 이때, $f'(-5)$ 의 값을 구하시오. (15점)



논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

으로 주어진다.

(※) 직선 $l : y=k(x-10)+5$ 과 타원 $C : \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 이 있다.

(4-1) 타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위를 구하시오. (10점)

(4-2) 타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점을 각각 P, Q라고 하고, 두 점 P, Q에서 각각 타원에 접하는 두 직선의 교점을 $R(a, b)$ 라고 하자. 상수 k가 (4-1)에서 구한 범위를 움직일 때, a와 b의 관계식을 구하고 b의 범위를 구하시오. (15점)

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>