2016학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오전)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).
5. 답안은 반드시 해당 문제의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

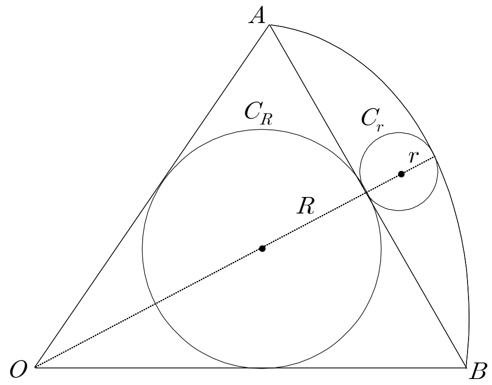
논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

직각삼각형에 대한 피타고라스 정리는 삼각함수로 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 로 나타낼 수 있다.

(※) 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 부채꼴 AOB에 대하여, 아래의 그림과 같이 내접하는 두 원 C_R, C_r의 반지름의 길이를 각각 R, r이라 하자.



(1-1) $\angle AOB = \dfrac{\pi}{2}$일 때, R과 r의 값을 구하시오. (10점)

(1-2) $\angle AOB = \theta\ (0 < \theta < \pi)$일 때, 극한 $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{r}{R^2}$의 값을 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

좌표평면에서 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다.

(※) 직선 $\ell : y=x+k$와 타원 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$이 있다. (단, k는 상수이다.)

(2-1) 타원 C와 직선 ℓ이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 범위를 구하시오. (10점)

(2-2) 타원 C와 직선 ℓ이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다고 하자. 좌표평면의 원점 O에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값과 이 때의 k의 값을 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

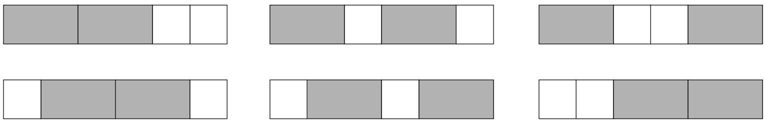
[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 양의 정수 n과 $1 \le k \le n-1$인 정수 k에 대하여, 조합의 수 ${}_nC_k$는 등식

$${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$$

을 만족한다. 위 등식을 파스칼의 공식이라고 한다.

(나) 1×1 크기의 정사각형 모양의 타일을 '정사각형 타일'이라 부르고, 1×2 크기의 직사각형 모양의 타일을 '도미노 타일'이라 부르자. 도미노 타일 2개와 정사각형 타일 2개를 사용하여 서로 겹치지 않게 1×6 크기의 직사각형을 전부 덮는 방법은 다음과 같이 6가지가 있다.



(※) 양의 정수 n에 대하여, 도미노 타일과 정사각형 타일을 사용하여 서로 겹치지 않게 $1 \times n$ 크기의 직사각형을 전부 덮을 때, 도미노 타일을 짝수개(0개 포함) 사용하는 방법의 수를 a_n이라 하고, 도미노 타일을 홀수개 사용하는 방법의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$이다.

(3-1) 도미노 타일 k개와 정사각형 타일 $(n-2k)$개를 사용하여 서로 겹치지 않게 $1 \times n$ 크기의 직사각형을 전부 덮는 방법의 수를 구하시오. (단, k는 $0 \le k \le \frac{n}{2}$인 정수이다.) (5점)

(3-2) a_{10}과 b_{10}의 값을 구하시오. (5점)

(3-3) 모든 $n \ge 3$에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

(3-4) 모든 $n \ge 1$에 대하여 $|a_n - b_n| \le 1$이 성립함을 보이시오. (5점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

연속함수 $f(x)$에 대하여, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt-\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라고 정의하자. 그러면 $x_1<x_2$일 때

$$\begin{aligned} g(x_2)-g(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,dt+\left|\int_0^{x_1}f(t)\,dt\right|-\left|\int_0^{x_2}f(t)\,dt\right| \\ &\geq \int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,dt-\left|\int_0^{x_1}f(t)\,dt-\int_0^{x_2}f(t)\,dt\right|=\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,dt-\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt\right|\geq 0 \end{aligned}$$

이다.

(※) 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x |t\sin t|\,dt-\left|\int_0^x t\sin t\,dt\right|$$

라고 정의하자.

(4-1) $g(30\pi)$의 값을 구하시오. (10점)

(4-2) $g(x)=12\pi$를 만족하는 x의 최솟값을 α, 최댓값을 β라고 할 때, 정적분

$$\int_\alpha^\beta t\sin t\,dt$$

의 값을 구하시오. (15점)

<연 습 장>

2016학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오전) 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 자연계(오전)</td></tr>
<tr><td>계열(과목) 및 문항번호</td><td colspan="2">수학문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>과목명</td><td>수학, 수학 II</td></tr>
<tr><td>내용영역 또는
핵심개념/용어</td><td>삼각함수의 활용, 삼각함수의 극한</td></tr>
<tr><td>답안 작성 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문 출제 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="5">교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">1. 수학, 함수, 삼각함수 : 삼각함수의 성질을 이해한다.
5. 수학 II, 함수의 극한과 연속 : 삼각함수의 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="6">※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서</td></tr>
<tr><td>참고자료</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td rowspan="4">고등학교
교과서</td><td>수학</td><td>김수환 외 9인</td><td>(주)교학사</td><td>2009</td><td>256~270</td></tr>
<tr><td>수학</td><td>계승혁 외 3인</td><td>성지출판(주)</td><td>2011</td><td>294~304</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>양승갑 외 7인</td><td>(주)금성출판사</td><td>2011</td><td>89~91</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>최용준 외 9인</td><td>(주)천재교육</td><td>2010</td><td>73~77</td></tr>
</table>

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 삼각함수 및 삼각함수의 극한에 대한 내용들을 잘 이해하고 있는지를 평가한다. 구체적으로 문제 구성(※)에서 주어진 그림과 같이 두 원이 외접하면서 부채꼴에 내접하는 상황에서 두 원의 반지름의 길이를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 기본적인 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

문제 구성(※)에서 주어진 그림과 같이 두 원이 외접하면서 부채꼴에 내접하는 상황에서 두 원의 반지름의 길이를 부채꼴의 중심각을 이용하여 구할 수 있다. 삼각함수의 활용 및 기본적인 삼각함수의 극한을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

직각삼각형에 대한 피타고라스 정리를 삼각함수로 표현하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학』교과서, 계승혁 외 3인, 성지출판㈜, 2009년, 298쪽 활용

(라) 논제 해설

두 원 C_R과 C_r이 서로 외접하면서 부채꼴 AOB에 내접하는 상황에서 (1-1)은 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 두 원 C_R과 C_r의 반지름인 R과 r를 기하적인 관찰을 통하여 구할 수 있다. (1-2)에서는 $\angle AOB = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ 일 때, 두 원 C_R과 C_r의 반지름인 R과 r를 (1-1)에서와 같이 기하적인 관찰을 통하여 θ에 대한 삼각함수로 다양하게 표현할 수 있고, $\theta \to +0$ 일 때 $\frac{r}{R^2}$의 극한값을 구할 수 있다.

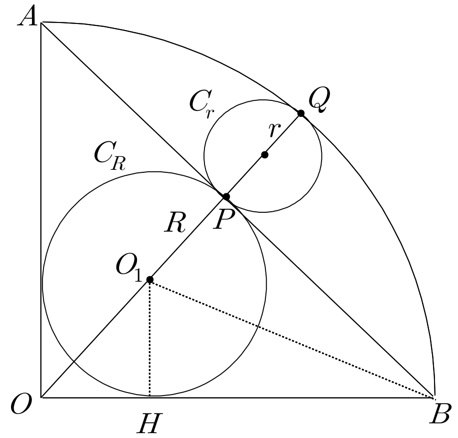
5. 채점기준(평가기준)

- 삼각함수 및 삼각함수의 극한에 대한 기본 지식
- 기하적인 관찰력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(1-1) (10점)

아래 그림과 같이 원 C_R의 중심을 O_1이라 하고 원 C_R이 선분 AB와 접하는 점을 P, 원 C_r이 호 AB와 접하는 점을 Q라 하자. 그리고 원 C_R의 중심 O_1에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



삼각형 AOB가 직각이등변삼각형이고 $\overline{AB}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{OP}=\overline{PB}=\overline{HB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. 따라서

$$R=\overline{OH}=1-\overline{HB}=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이고, } r=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}(1-\overline{OP})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

이다.

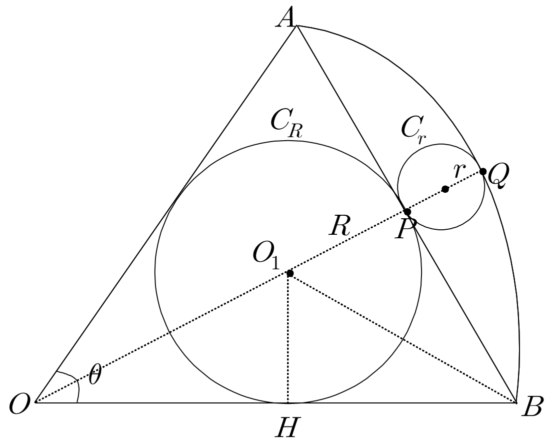
(별해) 원 C_R은 직각이등변삼각형 AOB의 내접원이므로,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}\sqrt{2}R=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})R$$

으로부터 $R=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(1-2) (15점)

아래 그림과 같이 원 C_R의 중심을 O_1이라 하고 원 C_R이 선분 AB와 접하는 점을 P, 원 C_r이 호 AB와 접하는 점을 Q라 하자. 그리고 원 C_R의 중심 O_1에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



(i) 위의 그림으로부터 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{HB}=\sin\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{OP}=\cos\frac{\theta}{2}$ 이므로 다음을 얻는다.

$$r=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}(1-\overline{OP})=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) \text{ (혹은 이 식을 변형한 식)}$$

$$R=\overline{OH}\tan\frac{\theta}{2}=(1-\overline{HB})\tan\frac{\theta}{2}=(1-\sin\frac{\theta}{2})\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} \text{ (혹은 이식을 변형한 식)}$$

(별해1) 원 C_R은 삼각형 AOB의 내접원이므로 $\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$으로부터

다음을 얻는다.

$$R=\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{1+\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} \text{ (혹은 이 식을 변형한 식)}$$

(별해2) $\angle PBH=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고 $\angle PBO_1=\frac{1}{2}\angle PBH=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}$ 이므로 직각삼각형 O_1PB로부터 다음을 얻는다.

$$R=\overline{BP}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\sin\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right) \text{ (혹은 이 식을 변형한 식).}$$

(ii) $\frac{r}{R^2}=\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}$ 이고

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0}\frac{r}{R^2}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(참고) (i)에서 구한 R, r의 θ에 대한 삼각함수로 다양하게 표현된 것에 대해서도 같은 극한값을 갖는다.

[문제 2] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오전)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제2	
출제범위	과목명	기하와 벡터, 수학 II
	내용영역 또는 핵심개념/용어	타원과 직선의 위치 관계, 도함수의 활용
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	7. 기하와 벡터, 이차곡선, 타원 : 타원과 직선의 위치관계를 이해한다. 5. 수학 II, 미분법, 도함수의 활용 : 함수의 극대와 극소를 이해하고, 이를 판정할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이재학 외 6인	(주)금성출판사	2009	177
	수학 II	유희찬 외 12인	(주)미래엔 컬처그룹	2010	176~179
	수학 II	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	161~165
	기하와 벡터	김수환 외 13인	(주)교학사	2010	52~56
	기하와 벡터	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	58~61
기타	2016학년도 인하대학교 논술 모의고사 자료집, 65쪽				

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 이차곡선(타원)과 직선의 위치 관계를 이해하고, 최솟값을 찾는 방법을 알고 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 구할 수 있다. 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 그 두 점과 원점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 면적이 최대가 되는 지점을 구할 수 있다.

(나) 제시문 해설

좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리 공식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학』교과서, 이재학 외 6인, (주)금성출판사, 2009년, 177쪽

(라) 논제 해설

(2-1)에서는 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 범위를 구하는 것이다. 이차방정식의 판별식 혹은 기울기가 1인 접선의 식 등을 이용하여 구할 수 있다. (2-2)에서는 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우, 그 두 점과 원점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 최대 면적을 미분을 활용하여 구할 수 있다.

5. 채점기준(평가기준)

- 타원과 직선의 위치 관계 이해 능력
- 최댓값을 구하는 능력(미분 혹은 산술평균•기하평균 활용 능력)
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(2-1) (10점)

직선 l 과 타원 C 로부터 이차방정식

$$5x^2+8kx+4k^2-4=0$$

을 얻는다. 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D/4=16k^2-5(4k^2-4)=-4k^2+20=-4(k^2-5)>0$$

이다. 따라서 타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 범위는 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ 이다.

(별해) 타원 C에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y=x\pm\sqrt{4+1}=x\pm\sqrt{5}$ 이므로 타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 범위는 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ 이다.

(2-2) (15점)

타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다고 하자. P, Q 의 좌표를 $P(\alpha, \alpha+k)$, $Q(\beta, \beta+k)$ 라 하면 α, β 는 (2-1)에서 얻은 이차방정식

$$5x^2+8kx+4k^2-4=0 \quad (-\sqrt{5}<k<\sqrt{5})$$

의 서로 다른 두 실근이므로 $\alpha+\beta=-\dfrac{8k}{5}$, $\alpha\beta=\dfrac{4k^2-4}{5}$ 이다. 삼각형 OPQ의 밑변의 길이인 선분 PQ의 길이를 구하면

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^{\,2} &= (\alpha-\beta)^2+(\alpha+k-\beta-k)^2 = 2(\alpha-\beta)^2 = 2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\\ &= 2\left\{\frac{64k^2}{25}-\frac{16(k^2-1)}{5}\right\} = 2\left\{\frac{80-16k^2}{25}\right\} = \frac{32(5-k^2)}{25}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{\frac{32(5-k^2)}{25}} = \frac{\sqrt{32(5-k^2)}}{5}$$

한편, 삼각형 OPQ의 높이는 원점 $O(0,0)$에서 직선 $x-y+k=0$까지의 거리이므로 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 삼각형 OPQ 의 넓이는

$$S(k) = \frac{1}{2}\frac{|k|}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{32(5-k^2)}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{k^2(5-k^2)}$$

이다. $f(k)=5k^2-k^4$ 이라 하자. $f'(k)=10k-4k^3=2k(5-2k^2)=0$ 을 풀면 $k=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 를 갖는다. $f'(k)$ 의 삼차다항식의 그래프로부터 $k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 에서 $f(k)$ 는 최댓값(극댓값)을 갖는다. 따라서 삼각형 OPQ 의 최대 넓이는 $k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 에서 $S\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)=1$ 이다.

(별해) 산술평균•기하평균을 이용하여

$$S(k) = \frac{2}{5}\sqrt{k^2(5-k^2)} \le \frac{2}{5}\frac{k^2+(5-k^2)}{2} = 1\,.$$

단 등호는 $k^2=5-2k^2$ 일 때, 즉 $k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 일 때이다.

[문제 3] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오전)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제3	
출제범위	과목명	적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	조합의 수, 파스칼의 공식, 타일(정사각형, 도미노)덮기
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	6. 적분과 통계, 이항정리 : 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. 3. 수학 I, 수열, 수학적 귀납법 : 수열의 귀납적 정의를 이해한다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	적분과 통계	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	94~99
	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	91~95
	수학 I	김해경 외 8인	(주)더텍스트	2010	144~149
	수학 I	이준열 외 9인	(주)천재교육	2010	155~162
	수학 I	황석근 외 12인	(주)교학사	2010	135~140
기타	2016학년도 인하대학교 논술 모의고사 자료집, 63쪽				

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 조합의 수와 파스칼의 정리에 대해 잘 이해하고 있는지를 평가한다. 특별히 조합적으로 셀 수 있는 수학적 대상을 제시하고, 이를 조합의 수로 표현하고, 구체적으로 계산을 할 수 있는지, 그리고 이 수의 성질을 점화식을 이용하여 확인할 수 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

도미노 타일과 정사각형 타일로 직사각형을 덮는 방법의 수가 조합의 수로 표현이 된다. 이를 이용하여 어떤 대상의 개수가 조합의 수의 합으로 정의되고, 이 수열의 특별한 항과 점화식을 구할 수 있고, 이를 활용하여 수열의 성질을 증명할 수 있다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 조합의 수에 관한 파스칼의 공식을 제시하였고, 이는 (3-3)을 해결하는 데 사용되었다. 제시문 (나)에서는 정사각형 타일과 도미노 타일의 정의를 주었고 2개의 정사각형 타일과 2개의 도미노 타일을 가지고 1×6 크기의 직사각형을 전부 덮는 방법을 제시하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『적분과 통계』교과서, 계승혁 외 5인, 성지출판(주), 2010년, 95쪽

(라) 논제 해설

(3-1)에서는 직사각형을 타일로 덮는 방법의 수가 조합의 수가 되는지 확인한다. (3-2)에서는 조합의 수의 정의를 이용하여, 특별한 경우의 값을 계산한다. (3-3)에서는 파스칼의 공식을 이용하여, 점화식을 유도할 수 있다. (3-4)에서는 (3-3)에서 얻은 두 개의 점화식을 이용하여, 순환수열임을 확인하고, 모든 수열의 값이 $-1, 0, 1$임을 확인한다.

5. 채점기준(평가기준)

- 논제 이해 능력
- 계산 능력
- 점화식에 관한 조합적인 설명 능력
- 수열의 성질을 파악하는 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(3-1) (5점)

도미노 타일 k개와 정사각형 타일 $(n-2k)$개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉, 2종류의 $(n-k)$개의 타일 중 도미노 타일 k개를 놓을 순서를 선택하는 방법이므로,

$$ {}_{n-k}C_k = {}_{n-k}C_{n-2k} = \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!} = \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!} $$

가 된다.

(3-2) (5점)

위의 결과를 이용하면, a_n과 b_n의 정의에 따라서 일반항을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_n = {}_nC_0 \quad + {}_{n-2}C_2 \ + {}_{n-4}C_4 \ + \cdots$$

$$b_n = {}_{n-1}C_1 \ + {}_{n-3}C_3 \ + {}_{n-5}C_5 \ + \cdots$$

따라서 위의 식을 이용하여 계산을 하면,

$$a_{10} = {}_{10}C_0 + {}_8C_2 + {}_6C_4 = 1 + 28 + 15 = 44$$

$$b_{10} = {}_9C_1 \ + {}_7C_3 + {}_5C_5 = 9 + 35 + 1 \ = 45$$

가 된다.

(3-3) (10점)

파스칼의 정리$({}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1})$와 경계조건$({}_nC_0 = {}_{n-1}C_0 = 1)$에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다. 양의 정수 $n \geq 3$에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n-1} + b_{n-2} &= ({}_{n-1}C_0 + {}_{n-3}C_2 \ + {}_{n-5}C_4 + \cdots) \\ &\quad + ({}_{n-3}C_1 + {}_{n-5}C_3 + {}_{n-7}C_5 + \cdots) \\ &= {}_nC_0 \quad + {}_{n-2}C_2 \ + {}_{n-4}C_4 + {}_{n-6}C_6 + \cdots \ = a_n \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} b_{n-1} + a_{n-2} &= \quad ({}_{n-2}C_1 + {}_{n-4}C_3 + {}_{n-6}C_5 + \cdots) \\ &\quad + ({}_{n-2}C_0 + {}_{n-4}C_2 + {}_{n-6}C_4 + \cdots) \\ &= \quad {}_{n-1}C_1 + {}_{n-3}C_3 + {}_{n-5}C_5 + \cdots \ = b_n \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ 가 성립한다.

(별해) 도미노 타일을 짝수개 사용하는 방법(a_n)은 첫 타일을 정사각형 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 짝수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(a_{n-1})과 첫 타일을 도미노 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 홀수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(b_{n-2})으로 생각해 볼 수 있다.

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-2}$$

비슷하게 도미노 타일을 홀수개 사용하는 방법(b_n)은 첫 타일을 정사각형 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 홀수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(b_{n-1})과 첫 타일을 도미노 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 짝수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(a_{n-2})으로 생각해 볼 수 있다.

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2}$$

따라서 모든 양의 정수 $n \geq 3$에 대하여 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ 가 성립한다.

(3-4) (5점)

$c_n = a_n - b_n$이라 하자. (3-3)의 결과를 활용하면

$$
\begin{aligned}
c_n &= a_n - b_n \\
&= (a_{n-1} + b_{n-2}) - (b_{n-1} + a_{n-2}) \\
&= (a_{n-1} - b_{n-1}) - (a_{n-2} - b_{n-2}) \\
&= c_{n-1} - c_{n-2}
\end{aligned}
$$

이 성립한다. 따라서

$$
\begin{aligned}
&c_1 = a_1 - b_1 = 1 - 0 = 1 \\
&c_2 = a_2 - b_2 = 1 - 1 = 0 \\
&c_3 = c_2 - c_1 = 0 - 1 = -1 \\
&c_4 = c_3 - c_2 = -1 - 0 = -1 \\
&c_5 = c_4 - c_3 = -1 - (-1) = 0 \\
&c_6 = c_5 - c_4 = 0 - (-1) = 1 \\
&c_7 = c_6 - c_5 = 1 - 0 = 1 \\
&\qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

으로 c_n은 주기가 6인 순환수열이 되고, c_n의 첫 6항이 $1, 0, -1, -1, 0, 1$이므로, 모든 양의 정수 $n \geq 1$에 대하여 $|c_n| = |a_n - b_n| \leq 1$이 성립한다.

[문제 4] (25점)

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 자연계(오전)</td></tr>
<tr><td>계열(과목) 및 문항번호</td><td colspan="2">수학문제4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>과목명</td><td>수학 II, 적분과 통계</td></tr>
<tr><td>내용영역 또는
핵심개념/용어</td><td>절댓값 함수의 정적분,
정적분 값의 절댓값</td></tr>
<tr><td>답안 작성 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문 출제 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="5">교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">6. 적분과 통계, 적분법 : 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="6">※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료</td></tr>
<tr><td>참고자료</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td rowspan="4">고등학교
교과서</td><td>적분과 통계</td><td>최용준 외 9인</td><td>(주)천재교육</td><td>2010</td><td>48~62</td></tr>
<tr><td>적분과 통계</td><td>최봉대 외 6인</td><td>(주)중앙교육진흥
연구소</td><td>2010</td><td>53~65</td></tr>
<tr><td>적분과 통계</td><td>윤재한 외 23인</td><td>(주)더텍스트</td><td>2010</td><td>52~62</td></tr>
<tr><td>적분과 통계</td><td>계승혁 외 5인</td><td>성지출판(주)</td><td>2010</td><td>41~48</td></tr>
<tr><td>기타</td><td colspan="5">2015학년도 수능 수학 짝수 B형 30번 문제</td></tr>
</table>

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이와 적분과의 관계를 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

정적분으로 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |t\sin t|\, dt - \left| \int_0^x t\sin t\, dt \right|$$

에 대하여 $g(30\pi)$을 계산할 수 있고, $g(x) = 12\pi$일 때 x의 최솟값과 최댓값을 구할 수 있다.

(나) 제시문 해설

제시문은 함수 $g(x)$가 증가함수임을 제공하였다. 이는 (4-2)를 해결하는 데 사용되었다.

(다) 제시문 출처

창작

(라) 논제 해설

(4-1)에서는 절댓값 함수의 정적분과 정적분 값의 절댓값 사이의 관계를 함수의 그래프를 통해 이해하고, 부분적분법을 이용하여 $g(30\pi)$의 값을 계산하는 문제이다. (4-2)에서는 제시문에서 주어진 함수 $g(x)$의 증가성질을 이용하여 함수 $g(x)$의 구간별 그래프의 변화를 이해하고 분석하는 문제이다.

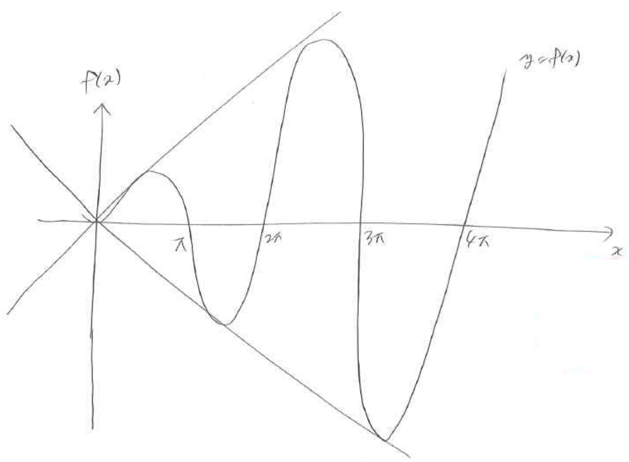
5. 채점기준(평가기준)

- 제시문 및 논제 이해 능력
- 논리적 계산력
- 영역의 넓이와 적분과의 관계 파악 능력
- 종합적 사고력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(4-1) (10점)

$f(x) = x\sin x \ (x \geq 0)$fk 하면 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 주어진다.



위의 그래프로부터 $f(x)$는 각 구간 $[(k-1)\pi, k\pi]$ $(k=0,1,2,\cdots)$에서 부호가 일정하고

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\sin x\,dx &= [-x\cos x]_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\cos x\,dx \\ &= -k\pi\cos(k\pi)+(k-1)\pi\cos((k-1)\pi) \\ &= -k\pi(-1)^k+(k-1)\pi(-1)^{k-1} = (-1)^{k-1}(2k-1)\pi\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}g(30\pi) &= \int_0^{30\pi}|t\sin t|\,dt - \left|\int_0^{30\pi} t\sin t\,dt\right| \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{30}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t\sin t\,dt\right|\right\} - \left|\int_0^{30\pi} t\sin t\,dt\right| \\ &= \sum_{k=1}^{30}(2k-1)\pi - \left|[-t\cos t]_0^{30\pi}\right| \\ &= 900\pi - 30\pi = 870\pi\end{aligned}$$

(4-2) (15점)

먼저 $g(\pi)=\pi-\pi=0$
$g(2\pi)=\pi(1+3)-\pi|1-3|=2\pi$
$g(3\pi)=\pi(1+3+5)-\pi|1-3+5|=6\pi$
$g(4\pi)=\pi(1+3+5+7)-\pi|1-3+5-7|=12\pi$

이다.

(i) $x>4\pi$에서 $g(x)$가 증가함수이므로 $g(x)>g(4\pi)=12\pi$이다. 따라서 $g(x)=12\pi$를 만족하는 x의 최댓값인 β는 $\beta=4\pi$이다.

(ii) $\int_0^{3\pi} t\sin t\,dt=(1-3+5)\pi=3\pi$이고 $\int_0^{4\pi} t\sin t\,dt=-4\pi$이므로

$$\int_0^{\alpha} t\sin t\,dt=0$$

인 α가 구간 $(3\pi, 4\pi)$에서 존재한다.

(iii) $3\pi\le x\le\alpha$에서 $g(x)$는 증가함수이고

$$g(\alpha)=\int_0^{\alpha}|t\sin t|\,dt-\left|\int_0^{\alpha} t\sin t\,dt\right| = \int_0^{\alpha}|t\sin t|\,dt=(1+3+5+3)\pi=12\pi$$

이므로 $g(x)=12\pi$를 만족하는 x의 최솟값은 α이다. 그러므로

$$\int_{\alpha}^{\beta} t\sin t\,dt=\int_0^{4\pi} t\sin t\,dt-\int_0^{\alpha} t\sin t\,dt=-4\pi$$

이다.

(별해) $\int_0^{x} t\sin t\,dt=0$인 점들을 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 라고 하면

$$0 < \pi < a_1 < 2\pi < a_2 < 3\pi < a_3 < \cdots .$$

구간 $(2n\pi, a_{2n})$에서 $x\sin x > 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt < 0$ 이므로 $g'(x) = 2x\sin x > 0$ 이다.

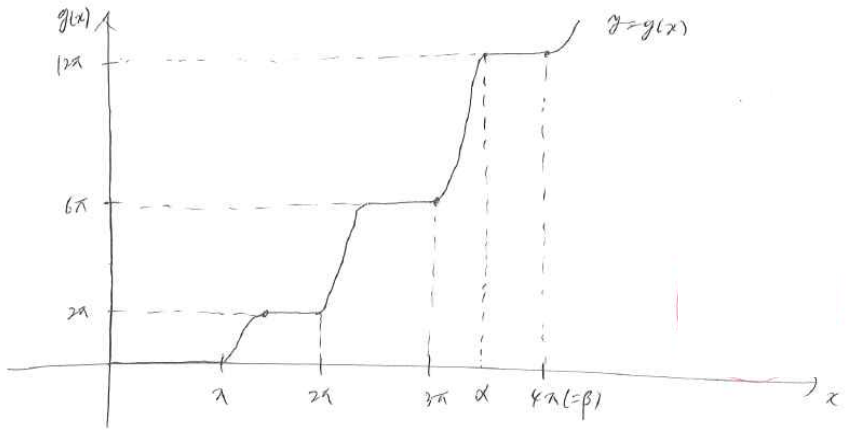
구간 $(a_{2n}, (2n+1)\pi)$ 에서 $x\sin x > 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt > 0$ 이므로 $g'(x) = 0$ 이다.

구간 $((2n+1)\pi, a_{2n+1})$에서 $x\sin x < 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt > 0$ 이므로 $g'(x) = -2x\sin x > 0$ 이다.

구간 $(a_{2n+1}, (2n+2)\pi)$ 에서 $x\sin x < 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt < 0$ 이므로 $g'(x) = 0$ 이다.

그런데 $g(4\pi) = 12\pi$ 이고 $g(x)$는 증가함수이므로 $x > 4\pi$ 이면 $g(x) > 12\pi$ 이다. 따라서 $\int_0^\alpha t\sin t\,dt = 0$ 이고 $3\pi < \alpha < 4\pi$ 인 α가 $g(x) = 12\pi$ 를 만족하는 최솟값이다. 따라서

$$\int_\alpha^\beta t\sin t\,dt = \int_0^{4\pi} t\sin t\,dt = -4\pi$$



2016학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오후)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).
5. 답안은 반드시 해당 문제의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) '제곱수'란 어떤 양의 정수의 제곱이 되는 수이고, '세제곱수'란 어떤 양의 정수의 세제곱이 되는 수이다. 또한, '거듭제곱수'란 어떤 양의 정수 n과 2 이상의 정수 k에 대하여 n^k 꼴인 수를 말한다. 단, 1은 거듭제곱수이다.

(나) $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, $3^6 = 729$ 이다.

(1-1) 1부터 1000까지의 정수 중, 제곱수 또는 세제곱수인 정수의 개수를 구하시오. (10점)

(1-2) 제곱수나 세제곱수가 아닌 양의 정수들의 수열

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \cdots$$

에 대하여, 1000번째 항을 구하시오. (7점)

(1-3) 1부터 1000까지의 양의 정수 중, 거듭제곱수의 개수를 구하시오. (8점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

차수가 $n-1$ 이하인 다항식 $F(x)$를 서로 다른 1차식들의 곱인 n차 다항식 $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$으로 나누어 얻어진 유리식 $Q(x)=\dfrac{F(x)}{P(x)}$는 항상

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x-a_i}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

(※) 양의 정수 n에 대하여 $P_n(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$이라 하고 $Q_n(x)=\dfrac{1}{P_n(x)}$이라 하자.

(2-1) 유리식 $Q_5(x)$를 제시문과 같이

$$Q_5(x)=\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2}{x-2}+\frac{b_3}{x-3}+\frac{b_4}{x-4}+\frac{b_5}{x-5}$$

로 나타낼 때, 상수 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) 양의 정수 n에 대하여 $Q_n(x)$를 제시문과 같이 $Q_n(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x-i}$로 나타낼 때, $(n-1)!\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|b_i|$를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P'을 평면 α에 내린 점 P의 정사영이라고 한다. 일반적으로 도형 F에 속하는 각 점을 평면 α에 내린 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 평면 α에 내린 도형 F의 정사영이라고 한다. 직선 ℓ이 평면 α와 수직이 아닐 때, 직선 ℓ을 평면 α에 내린 정사영 ℓ'은 직선이 된다.

(※) 구 $x^2+y^2+z^2=11$과 평면 $x+y+2z=6$이 만나서 이루는 원을 C라고 하자.

(3-1) 원 C의 반지름의 길이와 중심의 좌표를 구하시오. (5점)

(3-2) 방정식 $x-k=\dfrac{y+4}{4}=-\dfrac{z}{2}$로 주어지는 직선 ℓ의 평면 $x+y+2z=6$에 내린 정사영이 원 C의 중심을 지나도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) 점 $I(-1,1,0)$와 $Q(-1,1,3)$, 원 C 위의 점 P에 대하여, 내적 $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IQ}$의 최댓값을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체를 x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자르면 그 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$인 원이 된다. 그 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)=\pi\{f(x)\}^2$이 된다. 따라서 이 회전체의 부피는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

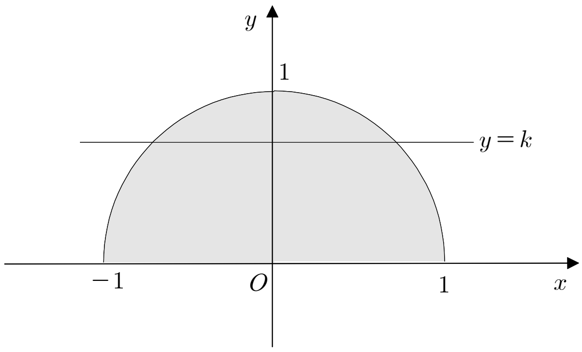
(나) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$$

(다) 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하고, 함수 $h(x)$가 미분가능할 때, 제시문 (나)의 합성함수의 미분법을 이용하면 다음과 같은 미분공식을 얻는다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{h(x)} f(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}(F(h(x))-F(a))=f(h(x))h'(x)$$

(※) 아래의 그림과 같이 부등식 $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$으로 주어진 영역이 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 분할된 두 부분 중 위쪽 영역과 아래쪽 영역을 직선 $y=k$를 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 각각 $V_1(k)$, $V_2(k)$라고 하자.



(4-1) $V_1(k)-V_2(k)$를 구하시오. (10점)

(4-2) $V_1(k)$를 k에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dk}V_1(k)=C_1\int_k^1\sqrt{1-x^2}\,dx+C_2$$

로 나타낼 수 있다. 이때 상수 C_1과 C_2를 구하시오. (10점)

(4-3) $V_1(k)+V_2(k)$가 $k=c$에서 최솟값을 가질 때, $\int_0^c\sqrt{1-x^2}\,dx$의 값을 구하시오. (5점)

<연 습 장>

2016학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오후) 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 자연계(오후)</td></tr>
<tr><td>계열(과목) 및 문항번호</td><td colspan="2">수학문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>과목명</td><td>수학</td></tr>
<tr><td>내용영역 또는
핵심개념/용어</td><td>집합의 연산 법칙
제곱수, 세제곱수, 거듭제곱수</td></tr>
<tr><td>답안 작성 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문 출제 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="5">교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">1. 수학, 수와 연산 : 집합의 연산법칙을 이해한다.</td></tr>
<tr><td colspan="6">※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서</td></tr>
<tr><td>참고자료</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td rowspan="2">고등학교
교과서</td><td>수학</td><td>계승혁 외 3인</td><td>성지출판(주)</td><td>2009</td><td>15~23</td></tr>
<tr><td>수학</td><td>이재학 외 6인</td><td>(주)금성출판사</td><td>2009</td><td>12~21</td></tr>
</table>

3. 출제의도

별다른 수학적 지식이 없이도 어떤 집합의 원소를 세는 문제로, 기본적인 수리적인 능력을 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

제곱수, 세제곱수, 그리고 거듭제곱수의 개수를 계산할 수 있다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 제곱수, 세제곱수, 거듭제곱수에 대한 정의를 제공하였다.

제시문 (나)에서는 $31^2 = 961,\ 32^2 = 1024,\ 3^6 = 729$ 을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

창작

(라) 논제 해설

(1-1)에서는 합집합 $A\cup B$의 원소의 개수는 두 집합 A와 B의 원소의 개수의 합에서 교집합 $A\cap B$의 원소의 개수를 뺀 값임은 기본적인 사실이다. 이것을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 원소를 꼼꼼히 써 주면 답을 쉽게 구할 수 있다. (1-2)에서는 제곱수나 세제곱수가 아닌 수 들을 나열했을 때 1000번째 항을 찾는 것으로 (1-1)의 결과와 제시문(나)를 이용하여 구할 수 있다. (1-3)에서는 (1-1)과 (1-2)의 결과를 활용하는 문제이다.

5. 채점기준(평가기준)

- 합집합의 원소의 개수를 구하는 능력
- 수리적인 계산 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(1-1) (10점)

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$를 이용한다.

6 제곱수 : $1^6, 2^6, 3^6$ 로 3개

제곱수 : 1 ~ 31 까지 31개

세제곱수 : 1 ~ 10 까지 10개

$\therefore\ 31+10-3=38$ 개

(1-2) (7점)

1 부터 1000 까지 $1000-38=962$ 개 항이 있고 1000 이상인 수들 중에는 1001 부터 연속인 38 개의 수 중에 제곱수 또는 세제곱수는 $32^2=1024$ 하나만 있으므로 1000 번째 항은 1039 이다.

(1-3) (8점)

n의 거듭제곱수 중에서 1000 이하인 것의 개수를 $P(n)$이라 하자.

$P(1)=1,\ P(2)=8,\ P(3)=5,\ P(5)=3$

$P(6)=P(7)=P(10)=2$

$P(11)=\ \cdots\ =P(31)=1$ (이 중 16, 25, 27 은 제외)

$\because\ 1+8+5+3+2+2+2+(21-3)=41$ 개.

(별해) (1-1)에서 구한 38개의 수 외에 $2^5, 2^7, 3^5$ 3개만 추가하면 되므로 41개.

[문제 2] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제2	
출제범위	과목명	수학, 적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	항등식, 유리식 계산 이항정리, 이항계수
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	1. 수학, 문자와 식 : 유리식의 뜻을 알고 그 계산을 할 수 있다. 6. 적분과 통계, 순열과 조합 : 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이재학 외 6인	(주)금성출판사	2009	94~98
	수학	계승혁 외 3인	성지출판(주)	2009	105~110
	수학	김수한 외 9인	(주)교학사	2009	92~96
	수학	황선욱 외 2인	좋은책 신사고	2009	94~98
	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	91~96
	적분과 통계	성지출팜(주)	계승혁 외 5인	2010	94~99

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 다항식과 유리식에 대한 기본적인 내용들을 잘 이해하고, 두 개 이상의 유리식을 분모가 같은 유리식으로 통분하는 과정에서 패턴인식과 처리능력을 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

주어진 유리식을 이해하고 분석하여 2개 이상의 유리식의 합으로 나타내고 분자들의 계수를 조합의 수로 논리적으로 표현할 수 있다.

(나) 제시문 해설

차수가 $n-1$ 이하인 다항식 $F(x)$를 서로 다른 1차식들의 곱인 n차 다항식

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

으로 나누어 얻어진 유리식 $Q(x)=\dfrac{F(x)}{P(x)}$는 항상

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x-a_i}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다는 정보를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

창작

(라) 논제 해설

(2-1)에서는 계산을 통해 계수들 b_i의 패턴을 인식하고 (2-2)에서는 일반적인 상황에서 b_i를 n의 식으로 표현하고 그 합을 구한다.

5. 채점기준(평가기준)

- 유리식의 합의 계산에서 통분 능력
- 논리적 분석 및 추론 능력
- 패턴인식과 처리능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(2-1) $P_5(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$에 대해 다음을 얻는다.

$$Q_5(x)=\frac{1}{P_5(x)}=\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2}{x-2}+\frac{b_3}{x-3}+\frac{b_4}{x-4}+\frac{b_5}{x-5}$$

$$\Rightarrow\quad 1=b_1\frac{P_5(x)}{x-1}+b_2\frac{P_5(x)}{x-2}+b_3\frac{P_5(x)}{x-3}+b_4\frac{P_5(x)}{x-4}+b_5\frac{P_5(x)}{x-5}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad 1=\,&b_1(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\\&+b_2(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)\\&+b_3(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)\\&+b_4(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)\\&+b_5(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

$x=1$을 대입하면 $1=b_1(-1)(-2)(-3)(-4)=(4!)b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$

$x=2$를 대입하면 $1=b_2(1)(-1)(-2)(-3)=-(3!)b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2=-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6}$

$x=3$을 대입하면 $1=b_3(2)(1)(-1)(-2)=(2!)(2!)b_3 \quad \Rightarrow \quad b_3=\dfrac{1}{(2!)(2!)}=\dfrac{1}{4}$

$x=4$를 대입하면 $1=b_4(3)(2)(1)(-1)=-(3!)b_4 \quad \Rightarrow \quad b_4=-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6}$

$x=5$를 대입하면 $1=b_5(4)(3)(2)(1)=(4!)b_5 \quad \Rightarrow \quad b_5=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$

(별해) $Q_2(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$,

$$Q_3(x)=Q_2(x)\cdot\frac{1}{x-3}=\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)\frac{1}{x-3}=\frac{-1}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1/2}{x-3}$$

마찬가지 방법으로, $Q_4(x)=Q_3(x)\cdot\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{-1/6}{x-1}+\dfrac{1/2}{x-2}+\dfrac{-1/2}{x-3}+\dfrac{1/6}{x-4}$

$$Q_5(x)=Q_4(x)\cdot\frac{1}{x-5}=\frac{1/24}{x-1}+\frac{-1/6}{x-2}+\frac{1/4}{x-3}+\frac{-1/6}{x-4}+\frac{1/24}{x-5}$$

따라서 $b_1=1/24$, $b_2=-1/6$, $b_3=1/4$, $b_4=-1/6$, $b_5=1/24$이다.

(2-2) (15점) $Q_n(x)=\dfrac{1}{P_n(x)}=\dfrac{b_1}{x-1}+\dfrac{b_2}{x-2}+\dfrac{b_3}{x-3}+\cdots+\dfrac{b_n}{x-n}$

$$\Rightarrow \quad 1=b_1\frac{P_n(x)}{x-1}+b_2\frac{P_n(x)}{x-2}+b_3\frac{P_n(x)}{x-3}+\cdots+b_n\frac{P_n(x)}{x-n}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 1=&\,b_1(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-n)\\&+b_2(x-1)(x-3)(x-4)\cdots(x-n)\\&+b_3(x-1)(x-2)(x-4)\cdots(x-n)\\&\ddots\\&+b_n(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-(n-1))\end{aligned}$$

$x=i \ (i=1,2,3,\cdots,n)$이라 놓으면

$$1=b_1 0+b_2 0+\cdots+b_{i-1}0+b_i(-1)^{n-i}(i-1)!\,(n-i)!+b_{i+1}0+\cdots+b_n 0$$

$$\Rightarrow \quad b_i=\frac{(-1)^{n-i}}{(i-1)!\,(n-i)!}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)!}\,{}_{n-1}C_{i-1}$$

$$\Rightarrow \quad (n-1)!\sum_{i=1}^{n}|b_i|=(n-1)!\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)!}\,{}_{n-1}C_{i-1}\right|=\sum_{i=1}^{n}{}_{n-1}C_{i-1}=2^{n-1}.$$

[문제 3] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제3	
출제범위	과목명	기하와 벡터
	내용영역 또는 핵심개념/용어	구, 평면, 직선 정사영, 벡터의 내적
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	7. 기하와 벡터 : 공간도형과 공간좌표, 벡터				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황석근 외 12인	(주)교학사	2010	80~167
	기하와 벡터	김수환 외 13인	(주)교학사	2010	77~166
	기하와 벡터	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	89~188
	기하와 벡터	정상권 외 8인	(주)금성출판사	2010	78~166
	기하와 벡터	김해경 외 23인	(주)더텍스트	2010	85~173

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 구와 평면과의 관계, 정사영, 내적 등의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

구와 평면과의 관계, 정사영, 내적 등의 개념을 알아보는 내용이다.

(나) 제시문 해설

정사영의 정의를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『기하와 벡터』교과서, 황석근 외 12인, (주)교학사, 2010년, 92쪽

(라) 논제 해설

(3-1)에서는 평면과 구가 만나서 이루는 원의 중심을 평면의 법선벡터를 이용해서 구하고 이로부터 반지름을 계산하는 문제이다. (3-2)에서는 정사영의 성질을 파악하는 문제이다. (3-3)에서는 내적의 성질과 주어진 공간도형 조건을 이용하여 최댓값을 찾는 문제이다.

5. 채점기준(평가기준)

- 공간도형 및 공간벡터의 이해력
- 논리적인 추론 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(3-1) (5점)

평면 $x+y+2z=6$의 법선벡터는 $(1,1,2)$이다. 따라서 (구의 중심과 원 C의 중심을 지나는 직선은 평면과 수직이므로) 원 C의 중심은 $(t,t,2t)$ 형태가 된다. 따라서 $t+t+2t=6$을 계산하면, $t=1$이므로, 원 C의 중심은 $(1,1,2)$가 된다. 또한 구의 중심인 원점에서 원 C중심까지의 거리는 $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$이고, 구의 반지름은 $\sqrt{11}$이므로, 원의 반지름은 $r=\sqrt{\sqrt{11}^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{5}$가 된다.

(3-2) (10점)

직선 $\ell : x-k=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{-z}{2}$의 평면 $x+y+2z=6$에 내린 정사영이 원 C의 중심을 지난다면, 원 C의 중심을 지나고 평면 $x+y+2z=6$에 수직인 직선 $x=y=\dfrac{z}{2}$은 직선 $\ell : x-k=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{-z}{2}$과 한 점에서 만나야 한다. 따라서 그 만나는 점을 $(t,t,2t)$라고 하면, $t-k=\dfrac{t+4}{4}=-t$를 만족해야 하며, $t=\dfrac{-4}{5}$이고, $k=2t=\dfrac{-8}{5}$이다.

(3-3) (10점)

원 C 위의 점 P의 좌표를 (x,y,z)라 하자.

$$\begin{cases} x+y+2z &= 6 \\ x^2+y^2+z^2 &= 11 \end{cases}$$

이므로,

$$\begin{cases} x+y=6-2z \\ xy \quad = \dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2} = \dfrac{(6-2z)^2-(11-z^2)}{2} \end{cases}$$

따라서 x와 y는 다음 이차방정식의 실수해가 된다.

$$t^2-(6-2z)t+\frac{(6-2z)^2-(11-z^2)}{2}=0$$

따라서 위의 이차방정식의 판별식은 다음 조건을 만족한다.

$$D=(6-2z)^2-2(6-2z)^2+2(11-z^2)=-3z^2+12z-7 \geq 0$$

따라서 $\frac{6-\sqrt{15}}{3} \leq z \leq \frac{6+\sqrt{15}}{3}$이 된다. 그러므로

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ} = (x+1, y-1, z) \cdot (0,0,3) = 3z$$

이므로, $\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ}$의 최댓값은 $6+\sqrt{15}$ 이다.

(별해) 원의 중심 $C(1,1,2)$와 $\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{CR}$이 되도록 하는 $R(1,1,5)$에 대하여, R을 평면 $\alpha : x+y+2z=6$에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그러면

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ} = (\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CP}) \cdot \overrightarrow{CR} = 6+\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CR}$$

의 최댓값은 $6+|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CH}|=6+\sqrt{5}\,|\overrightarrow{CH}|$이다.

(왜냐하면, $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CR} > 0$일 때, R에서 직선 CP에 내린 수선의 발을 H_P라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 H에서 직선 CP에 내린 수선의 발도 H_P이다. 직각삼각형 CH_PH에서 $|\overrightarrow{CH_P}| \leq |\overrightarrow{CH}|$이므로 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CR} = |\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CH_P}|$는 $H_P=H$일 때 최대이다.)

이때, 평면 α의 단위법선벡터 $\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$에 대하여 $\overrightarrow{CR} \cdot \vec{n} = \sqrt{6}$ 이므로

$$|\overrightarrow{CH}|=|\overrightarrow{CR}-(\overrightarrow{CR} \cdot \vec{n})\vec{n}|=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ}$의 최댓값은 $6+\sqrt{15}$ 이다.

[문제 4] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제4	
출제범위	과목명	적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	회전체의 부피
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	6. 적분과 통계, 적분법, 정적분의 활용 : 회전체의 부피를 구할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	56~69
	적분과 통계	최봉대 외 6인	(주)중앙교육진흥연구소	2010	56~73
	적분과 통계	윤재한 외 23인	(주)더텍스트	2010	55~68
	적분과 통계	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	45~52
	수학 II	윤재한 외 23인	(주)더텍스트	2010	110~191
	수학 II	정상권 외 8인	(주)금성출판사	2010	112~196

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 회전체의 부피를 적분을 이용하여 계산할 수 있는지, 적분 형태로 주어진 함수를 미분하여 최솟값을 찾는 방법을 알고 있는지를 평가한다. 또한 기본적인 적분을 계산할 수 있는지, 적분의 값과 넓이의 관계를 제대로 이해하고 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

단위 원판 $x^2+y^2 \le 1$ 중 1, 2사분면에 있는 영역을 직선 $y=k$로 분할하여 직선 $y=k$를 중심으로 회전하여 얻는 회전체의 부피를 계산하도록 한다. 미분을 이용하여 두 입체의 부피의 합이 최소가 되는 지점을 계산할 수 있다. 적분, 미분의 계산능력을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 회전체의 부피를 구하는 공식을 제공하였다.
제시문 (나)는 합성함수 형태로 주어지는 함수를 미분할 수 있는 공식을 제공하였다.
제시문 (다)는 적분 범위가 함수인 적분 형태로 주어진 함수를 미분하는 법을 설명하였다.

(다) 제시문 출처

제시문(가) : 고등학교『적분과 통계』교과서, 최봉대 외 6인, (주)중앙교육진흥연구소, 2010년, 69쪽
제시문(나) : 고등학교『수학 II』교과서, 윤재환 외 23인, (주)더텍스트, 2010년, 130쪽
제시문(다) : 고등학교『적분과 통계』교과서, 우정호 외 7인, (주)두산동아, 2010년, 49쪽

(라) 논제 해설

(4-1)에서는 제시문에 주어진 회전체 공식을 이용하여 $x^2+y^2 \le 1, y \ge 0$로 주어진 영역을 직선 $y=k$로 분할하여 각각의 영역을 직선 $y=k$을 중심으로 회전하여 얻은 회전체의 부피를 구할 수 있다. 두 개의 회전체의 부피의 합은 k에 관한 함수로 주어진다. 따라서 미분을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는다. 이를 위해 제시문에 주어진 적분으로 주어진 함수의 미분법을 이용한다. 마지막으로 적분의 기하적인 의미를 이용하여 $\int_0^{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$를 $\int_k^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$로 표현할 수 있는지 묻는다.

5. 채점기준(평가기준)

- 회전체의 부피를 적분을 통하여 계산할 수 있는 능력
- 주어진 함수의 최솟값을 미분을 통하여 계산하는 능력
- 주어진 제시문을 이용하여 적분으로 주어진 함수를 미분하여 계산할 수 있는지 여부
- 적분과 넓이의 관계를 이용하여 적분을 변환하는 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(4-1) (10점)

$\alpha(k)=\sqrt{1-k^2}$ 이라고 두면, 제시문 (가)에 의해 주어진 회전체 부피는

$$V_1(k)=2\pi\int_0^{\alpha(k)}(\sqrt{1-x^2}-k)^2dx$$

$$V_2(k) = 2\pi k^2 - 2\pi \int_{\alpha(k)}^{1} (\sqrt{1-x^2} - k)^2 dx$$

임을 알 수 있다. 이 때, $V_1(k) - V_2(k)$를 계산하면

$$\begin{aligned} V_1(k) - V_2(k) &= 2\pi \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - k)^2 dx - 2\pi k^2 \\ &= 2\pi \int_0^1 (-2k\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2) dx \\ &= -4k\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

이고 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $V_1(k) - V_2(k) = \frac{4\pi}{3} - \pi^2 k$ 이 된다.

(4-2) (10점)

(4-1)에서의 V_1 의 적분으로 주어진 식을 계산하면

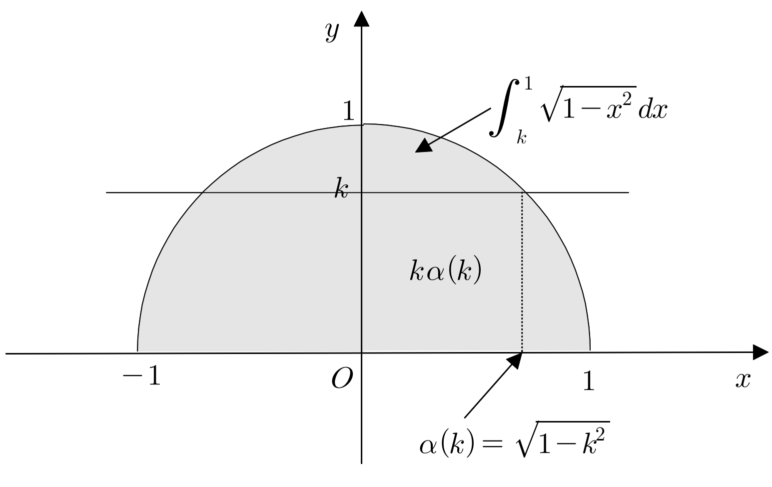
$$\begin{aligned} V_1(k) &= 2\pi \int_0^{\alpha(k)} (1 + k^2 - x^2 - 2k\sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 2\pi\alpha(k)(1+k^2) - \frac{2\pi}{3}\alpha(k)^3 - 4\pi k \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx \end{aligned}$$

제시문 (다)를 이용하면

$$\frac{d}{dk} \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx = \sqrt{1-\alpha(k)^2}\, \alpha'(k) = k\, \alpha'(k)$$

이므로, $V_1(k)$ 을 다음과 같이 미분할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} V_1(k) &= 2\pi\alpha'(k)(1+k^2) + 4\pi k\alpha(k) - 2\pi\alpha(k)^2\alpha'(k) - 4\pi \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx - 4\pi k^2 \alpha'(k) \\ &= 4\pi k\alpha(k) - 4\pi \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx \quad (\because 1 - k^2 = \alpha(k)^2) \end{aligned}$$



또한, 위의 그림을 통해 다음과 같은 등식을 유도할 수 있다.

$$\int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\,dx - k\alpha(k) = \int_k^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

따라서 $\frac{d}{dk} V_1(k) = -4\pi \int_k^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ 이므로 $C_1 = -4\pi$ 이고 $C_2 = 0$ 이다.

(4-3) (5점)

(4-1)의 결과에 의하면 $V_1(k) + V_2(k) = 2V_1(k) + \pi^2 k - \frac{4\pi}{3}$ 이고, (4-2)의 결과를 이용하면 $V_1'(k) + V_2'(k)$ 은

$$\frac{d}{dk}(V_1(k) + V_2(k)) = 2\frac{d}{dk} V_1(k) + \pi^2 = -8\pi \int_k^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \pi^2$$

따라서 $\int_c^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}$ 인 $k = c$ 에서 $\frac{d}{dk}(V_1(k) + V_2(k)) = 0$임을 알 수 있다. 또한

$$\frac{d^2}{dk^2}(V_1(k) + V_2(k)) = 8\pi\sqrt{1-k^2} \geq 0$$

이므로 $k = c$ 에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 값은

$$\int_0^c \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_c^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

이다.