

수 리 논 술

■ 수학 [100점]

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 $g : Y \rightarrow Z$ 가 주어졌을 때, 집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 함수값 $f(x)$ 는 집합 Y 의 원소이다. 또한 집합 Y 의 원소 $f(x)$ 에 대하여 함수값 $g(f(x))$ 는 집합 Z 의 원소이다. 이때 집합 X 의 임의의 원소 x 에 집합 Z 의 원소 $g(f(x))$ 를 대응시켜 X 를 정의역, Z 를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있다. 이렇게 얻은 함수를 두 함수 f 와 g 의 합성함수라 하고, 기호

$$g \circ f : X \rightarrow Z \quad \text{또는} \quad y = g(f(x))$$

로 나타낸다.

(나) 함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 보다 작은 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 α 를 $x=a$ 에서 $f(x)$ 의 좌극한이라고 하며, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ 와 같이 나타낸다. 또, x 가 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 β 에 한없이 가까워지면 β 를 $x=a$ 에서 $f(x)$ 의 우극한이라고 하며, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \beta$ 와 같이 나타낸다. 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 같지 않으면, 즉 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ 이면 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(다) 함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+h$ 까지 변할 때, 극한값 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 가 존재하면, 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수라 하고, 이를 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다.

(※) 다음과 같이 함수 $y=f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 정의되어 있다.

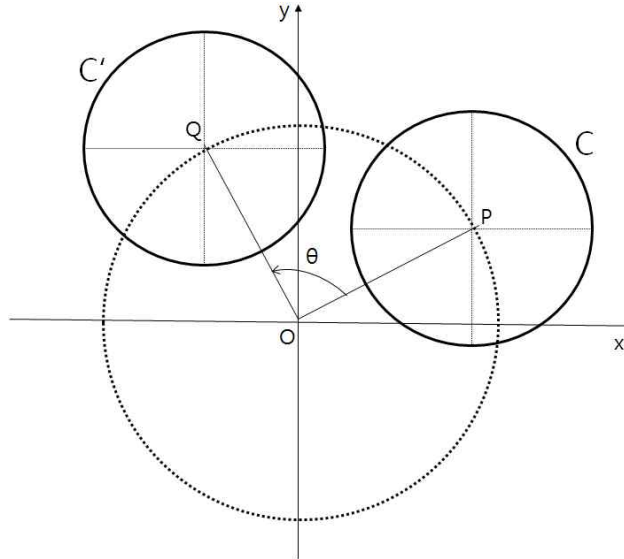
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < -1) \\ x^2 & (-1 \leq x < 1) \\ 2x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(1-1) 합성함수 $g=f \circ f$ 의 그래프의 개형을 그리고, 미분가능하지 않은 점을 모두 구하시오. (10점)

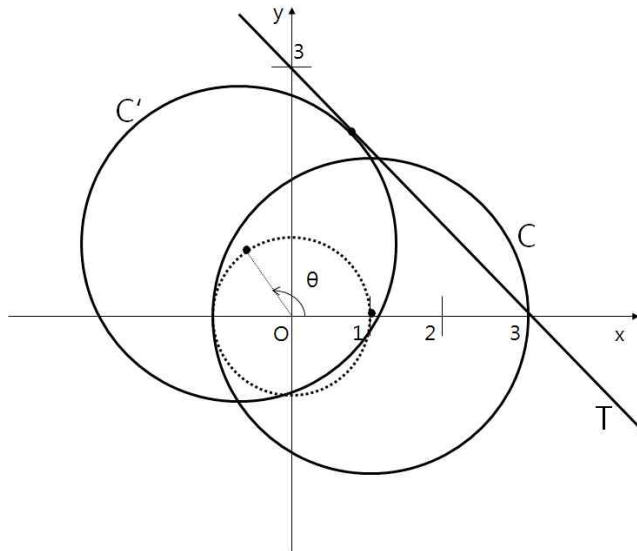
(1-2) 조건 $a_1=k$ 와 점화식 $a_{n+1}=f(a_n)$ ($n \geq 1$)으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 이 극한값을 가질 k 의 범위를 구하시오. (15점)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위에 주어진 원 C 를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전시키면 반지름은 변하지 않고 원 C 의 중심 P 가 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전된 점 Q 를 중심으로 갖는 원 C' 이 된다.



(2-1) 방정식 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 로 주어지는 원을 C , 방정식 $x+y=3$ 으로 주어지는 직선을 T 라고 하자. 원 C 를 원점을 중심으로 각 θ ($0 \leq \theta < \pi$)만큼 회전 변환시킨 도형을 C' 이라고 할 때, T 와 C' 가 한 점에서 만나게 되는 θ 의 값에 대하여, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오. (15점)



(2-2) 방정식 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 으로 주어지는 원을 K 라 하고, $(\pm r, \pm r)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형을 S 라 할 때, K 를 원점을 중심으로 임의의 각으로 회전시킨 도형과 S 의 교점의 개수가 항상 2 이하가 되도록 하는 r 의 범위를 구하시오. (10점)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

는 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분가능하며 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ 이다. 즉,

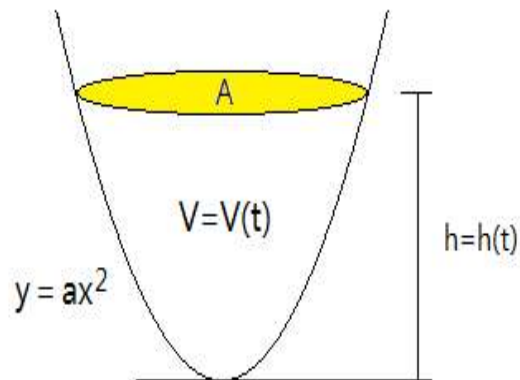
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

(나) 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 도 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(※) 양의 상수 a 에 대해 $-\sqrt{\frac{10}{a}} \leq x \leq \sqrt{\frac{10}{a}}$ 에서 정의된 포물선 $y = ax^2$ 을 y 축 둘레로 회전하여 얻은 포물면 모양의 빈 그릇이 있다.



(3-1) 이 그릇에 물이 가득 채워졌을 때 물의 부피를 구하시오. (5점)

(3-2) $t=0$ 일 때 이 그릇에 물을 붓기 시작하였다. 시각 t 에서 수면의 높이를 $h = h(t)$ 라 하고,

그릇에 담긴 물의 부피를 $V = V(t)$ 라 할 때 V 가 미분가능하고 항상 $\frac{d}{dt}V(t) = b$ (b 는

양의 상수)가 되도록 물을 붓는다. $t=c$ 일 때 그릇에 물이 가득 채워진다고 하고 h 가 t 에

관해서 미분가능하다고 가정할 때 $\lim_{t \rightarrow c-0} \frac{d}{dt}h(t)$ 를 구하시오. (10점)

(3-3) 이 그릇에 물이 가득 담겨 있는데, 수면의 넓이에 비례하는 양의 물이 증발하여 물의 부피가 점점 작아진다. 시각 t 에서 그릇에 담긴 물의 부피를 $V = V(t)$ 라 하고, 수면의 높이를 $h = h(t)$ 라 하면 수면의 넓이는 $A = A(h) = A(h(t))$ 로 표현된다. 그러면 상수 $k > 0$ 에 대해 $\frac{d}{dt} V(t) = -kA$ 가 성립한다. 이 그릇의 물이 완전히 말라버릴 때까지 시간이 얼마나 걸리는가? (단, $V = V(t)$ 와 $h = h(t)$ 가 미분가능하고 $A = A(h(t))$ 는 연속이라 가정한다.) (10점)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 치환적분법 : 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $x=g(t)$ 로 놓으면

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$$

이다. 예를 들면, $\int e^{f(\theta)} f'(\theta) d\theta$ 는 $f(\theta)=t$ 로 놓으면 $f'(\theta) d\theta = dt$ 이므로

$$\int e^{f(\theta)} f'(\theta) d\theta = \int e^t dt = e^t + C = e^{f(\theta)} + C$$

이다.

(나) 정적분의 성질 : 두 함수 $f(\theta), g(\theta)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 $f(\theta) \leq g(\theta)$ 이면 $\int_a^b f(\theta) d\theta \leq \int_a^b g(\theta) d\theta$ 이다.

(다) 함수의 극한에 대한 성질 : $H(x) \leq F(x) \leq G(x)$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = L$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = L$ 이다.

(4-1) $x > 0$ 일 때,

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x \tan \theta} d\theta \quad \text{와} \quad G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x \tan \theta} \sec^2 \theta d\theta$$

라고 하자. 이때, $\frac{1}{2}G(x) \leq F(x) \leq G(x)$ 임을 증명하시오. (10점)

(4-2) 제시문 (다)와 (4-1)에서 주어진 부등식 관계를 이용하여,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(xF(x))}{x}$$

의 값을 구하시오. (15점)

해설 및 예시 답안

수학 (100점)

1. 출제의도

정상적인 고등학교 수학교과를 이수한 수험생이면 충분히 풀 수 있는, 철저히 교과서 중심의 문제를 출제하였다. 함수의 극한, 미분계수, 원과 직선의 관계, 정적분과 미분의 관계 등을 잘 이해하고 있으며, 주어진 문제를 논리적으로 분석할 수 있는 능력과 자신의 생각을 논리적이고 합리적으로 표현하는 능력을 평가하고자 하는 의도로 문제를 출제하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

[문제 1]은 합성함수의 미분가능하지 않은 점을 구하는 것과 주어진 함수에 의해 정의되는 수열이 극한값을 가질 조건을 구하는 것이다. [문제 2]는 원을 회전시켜 주어진 직선에 접하는 경우와 주어진 정사각형과의 교점의 개수가 2개 이하일 경우에 대한 조건을 구하는 것이다. [문제 3]은 포물면 모양의 빈 그릇에 물이 채워졌을 때, 부피, 일정한 부피의 변화율을 갖도록 물을 붓는 경우 높이의 변화율의 극한값, 물이 완전히 말라버릴 때까지 걸리는 시간 등을 구하는 것이다. [문제 4]는 정적분으로 정의된 두 함수의 부등식 관계를 보이고 이 부등식을 활용하여 함수의 극한을 구하는 것이다.

(나) 제시문 해설

[문제 1]에서 제시문 (가)는 합성함수의 정의, 제시문 (나)는 우극한과 좌극한이 존재하더라도 같지 않으면 극한값은 존재하지 않음, 제시문 (다)는 한 점에서 미분가능에 대한 정의를 각각 설명하였다. [문제 2]의 제시문은 좌표평면 위에 주어진 원 C 를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전시키면 반지름은 변하지 않고 원 C 의 중심 P 가 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전된 점 Q 를 중심으로 갖는 원이 됨을 설명하였다. [문제 3]에서 제시문 (가)는 정적분과 미분과의 관계, 제시문 (나)는 미분가능한 두 함수의 합성함수의 미분법을 각각 설명하였다. [문제 4]에서 제시문 (가)는 치환적분법, 제시문 (나)는 정적분의 성질, 제시문 (다)는 함수의 극한에 대한 성질 등을 각각 설명하였다.

(다) 제시문 출처

[문제 1]

제시문 (가) : 『수학』, 천재문화, 222쪽

제시문 (나) : 『수학 II』, (주)지학사, 69쪽; 두산동아, 82쪽

제시문 (다) : 『수학 II』, (주)지학사, 113쪽

[문제 2]

제시문은 창작된 것이지만 고등학교 수학 교과서의 수준을 넘지 않는 내용으로 쉽게 이해 할 수 있다.

[문제 3]

제시문 (가) : 『적분과 통계』, (주)중앙교육진흥연구소, 41쪽

제시문 (나) : 『수학 II』, (주)지학사, 132쪽

[문제 4]

제시문 (가) : 『적분과 통계』, (주)중앙교육진흥연구소, 23쪽, 25쪽

제시문 (나) : 『적분과 통계』, (주)중앙교육진흥연구소, 49쪽

제시문 (가) : 『수학 II 익힘책』, (주)금성출판사, 75쪽

3. 논제 해설

[문제 1]은 주어진 함수 f 에 대하여 합성함수 $f \circ f$ 의 그래프를 그리고 미분가능하지 않은 점을 찾고, 그리고 $a_1 = k, a_{n+1} = f(a_n) (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 이 극한값을 가질 조건을 찾는 문제이다. [문제 2]는 원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 을 회전시켜 직선 $x+y=3$ 과 접하는 경우 회전각 θ 에 대한 $\cos \theta$ 를 구하는 문제와 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 을 회전시켜 꼭짓점이 $(\pm r, \pm r)$ 인 정사각형과의 교점의 개수가 항상 2 이하가 되는 r 의 범위를 찾는 문제이다. [문제 3]은 포물선 $y = ax^2$ 을 y 축 둘레로 회전하여 얻은 포물면 모양의 빈 그릇에 물이 가득 채워졌을 때 물의 부피, 부피가 일정하게 물을 붓는 경우 수면의 높이의 변화율의 극한, 그리고 수면의 넓이에 비례하는 양의 물이 증발하여 물의 부피가 점점 작아질 때, 물이 완전히 말라버릴 때까지 걸리는 시간을 구하는 문제이다. [문제

4]는 정적분으로 정의된 두 함수 $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x \tan \theta} d\theta$ 와 $G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x \tan \theta} \sec^2 \theta d\theta$

의 부등식 관계를 삼각함수의 성질로부터 유도하고 이 부등식을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(xF(x))}{x}$ 의 값을 구하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 고등학교 수학 과목에서 다루는 최소한의 기본 개념을 이해하고 있는 정도
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 추론하는 능력

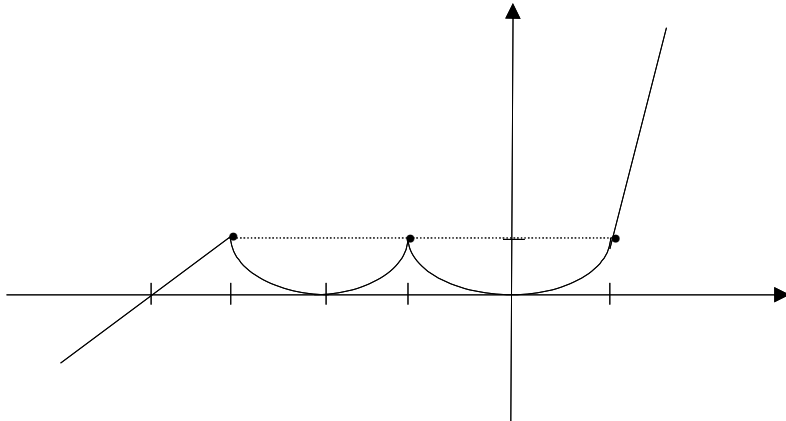
5. 예시 답안

[문제 1] (25점)

(1-1) (10점)

$$g(x) = \begin{cases} x+4 & (x < -3) \\ (x+2)^2 & (-3 \leq x < -1) \\ x^4 & (-1 \leq x < 1) \\ 4x-3 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이므로



좌우 미분계수가 같으므로 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하다. 미분가능하지 않은 점은 $x = -3, -1$ 두 개다.

(1-2) (15점)

(i) $k < -1$ 인 경우 : $a_n < -1$ 이면 $a_{n+1} = a_n + 2$ 이므로, 수열 $\{a_n\}$ 에서

$-1 \leq a_m < 1$ 인 m 이 존재한다. 그러면, $n > m$ 인 n 에 대하여 $a_{n+1} = a_n^2$ 이므로, $a_n = a_m^{2^{n-m}}$ 은 0 ($-1 < a_m < 1$ 인 경우) 또는 1 ($a_m = -1$ 인 경우)로 수렴한다.

(ii) $-1 < k < 1$ 인 경우 : $a_n = k^{2^{n-1}}$ 은 0 으로 수렴한다.

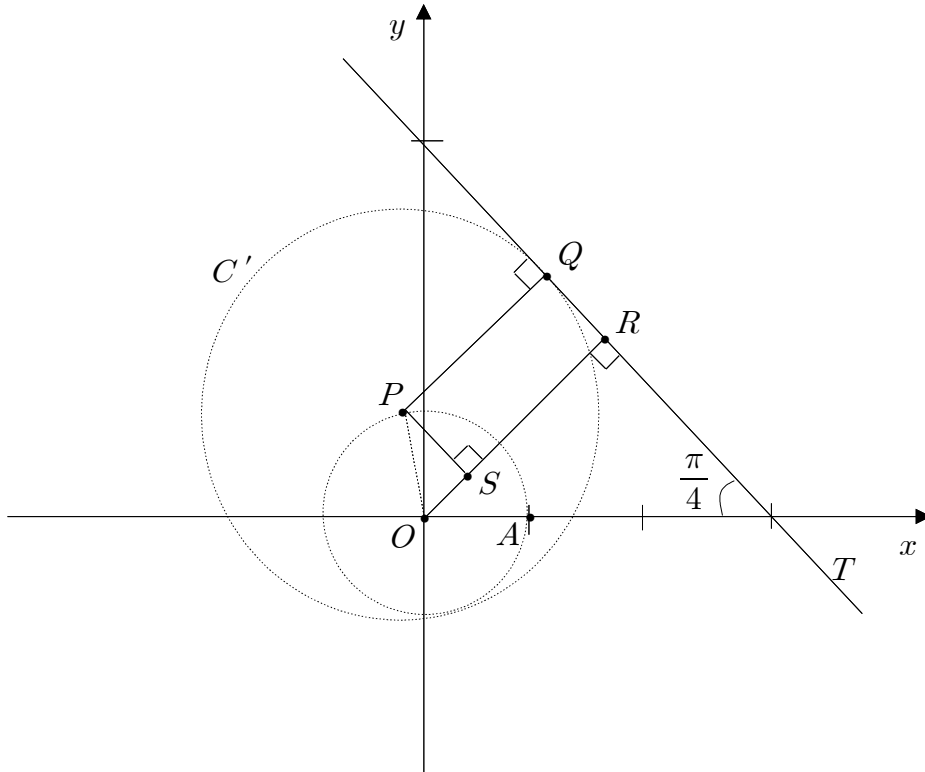
(iii) $k = -1$ 또는 $k = 1$ 인 경우 : $a_n = 1$ ($n \geq 2$)이다. 따라서 수렴한다.

(iv) $k > 1$ 인 경우 : $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 이고, $a_n = 1 + (k-1)2^{n-1}$ 이므로 발산한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 극한값을 가질 k 의 범위는 $k \leq 1$ 이다.

[문제 2] (25점)

(2-1) (15점)



위의 그림과 같이 회전이동한 원 C' 은 중심이 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 이고 반지름이 $\overline{PQ} = 2$ 인 원이다.

이 원이 직선 T 에 접할 때 위 그림에서 $\overline{OR} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\angle POS = \theta - \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{OS} = \cos(\angle POS) = \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)^2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-15 + 12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

이다.

(2-1) 별해

위의 그림과 같이 회전이동한 원 C' 은 중심이 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 이고 반지름이 $\overline{PQ} = 2$ 인 원이다.

중심 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 에서 직선 $T : x + y - 3 = 0$ 까지의 거리 $\frac{|\cos \theta + \sin \theta - 3|}{\sqrt{2}}$ 가 2이어야 하므로,

$\cos \theta + \sin \theta = 3 - 2\sqrt{2}$ 이다. 이때, 좌변은 $\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 와 같으므로, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -2 + \frac{3}{\sqrt{2}}$

이다. 따라서

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)^2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-15 + 12\sqrt{2}}$$

이다.

(2-2) (10점)

주어진 원 K 를 45° 회전한 원 C 가 S 와 만나는 점의 개수를 생각해보자.

$0 < r < \sqrt{2}$ 이면 C 와 S 의 윗변과 오른쪽 변과 각각 한 번씩 만난다.

그런데 이 범위에서 특히 $1 < r < \sqrt{2}$ 인 경우, 원 K 에는 원점과의 거리가 S 의 꼭짓점에서 원점까지의 거리와 같은 점 P 가 존재한다. 즉, $\overline{OP} = \sqrt{2}r$ 인 점 $P \in K$ 가 존재한다. 이때, P 가 S 의 꼭짓점에 오도록 K 를 적당히 회전하면, 회전한 원과 S 는 세 점에서 만난다. 왜냐하면, 회전한 원의 중심은 S 의 내부에 위치하기 때문이다.

$r = \sqrt{2}$ 인 경우에도 C 와 S 는 S 의 꼭짓점 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 을 포함해서 3개의 점에서 만난다.

$\sqrt{2} < r < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 C 와 S 는 S 의 윗변과 오른쪽 변에서 각각 2번씩 총 4번 만난다. $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

이면, C 는 S 의 윗변과 오른쪽 변의 각각 한 점에서 접하고, $r > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면, C 와 S 는 만나지 않는다.

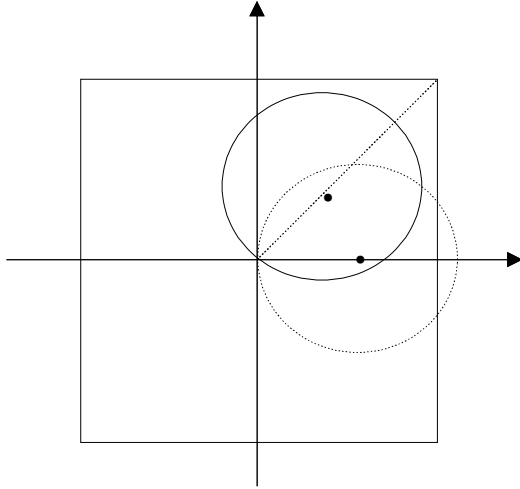
따라서 문제의 조건을 만족하려면 $r \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $0 < r \leq 1$ 이어야 한다.

이제 $r \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 경우 K 를 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시키면, 정사각형의 윗변, 아랫변과는 만나지 않고, 오른쪽 변과 기껏해야 2점에서 만나므로, S 와의 교점은 2개 이하이다. 마찬가지로 모든 θ 값에 대하여 같은 논리로 $S \cap K$ 의 교점은 2개 이하이다.

마찬가지로 $0 < r \leq 1$ 인 경우 주어진 원을 회전시켰을 때, S 와 만나는 점들은 원 K 에서 $x \leq 1$ 인 부분 (반원)이 회전하여 만나는 점들과 같다. K 를 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시키면, S 의 윗변과 한 점에서 만나고 S 의 아랫변 또는 오른쪽 변과 한 점에서 만난다. 이 경우 $S \cap K$ 는 2개의 점이며, 같은 논리에 의해 모든 θ 값에 대하여 $S \cap K$ 는 2개의 점이다.

따라서 구하는 r 의 범위는 $0 < r \leq 1$ 그리고 $r \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(참고) r 을 실수 범위에서 풀이한 학생의 경우는 범위를 $0 < |r| \leq 1$ 그리고 $|r| \geq 1 + \sqrt{2}$ 로 구하면 된다. $r = 0$ 은 정사각형이 만들어지지 않으므로 답에서 배제한다.



[문제 3] (25점)

(3-1) (5점)

회전체의 부피 공식에 의해 빈 그릇에 물이 가득 채워질 때 물의 부피는 다음과 같다.

$$V = \pi \int_0^{10} \frac{y}{a} dy = \left[\frac{\pi y^2}{2a} \right]_0^{10} = \frac{50\pi}{a}$$

(3-2) (10점)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \leq y \leq h(t)$ 인 영역에 위치하고,

$$V(t) = \pi \int_0^{h(t)} \frac{y}{a} dy = \frac{\pi}{2a} (h(t))^2 \text{이다.}$$

양변을 t 로 미분하면 $b = V'(t) = \frac{\pi}{a} h(t) h'(t)$ 이다. 따라서 $0 < t < c$ 일 때 $h'(t) = \frac{ab}{\pi h(t)}$ 이다.

$h(c) = 10$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow c-0} h'(t) = \frac{ab}{10\pi}$ 이다.

(3-2) 별해

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \leq y \leq h = h(t)$ 인 영역에 위치하고,

$$V(t) = \pi \int_0^h \frac{y}{a} dy \text{이다. 양변을 } h \text{ 로 미분하면 } \frac{dV}{dh} = \frac{\pi h}{a} \text{ 이다. } \frac{dV}{dt} = b \text{ 이므로 } \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \frac{dV}{dt} = \frac{ab}{\pi h}$$

이다. $h(c) = 10$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow c-0} h'(t) = \frac{ab}{10\pi}$ 이다.

(3-3) (10점)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \leq y \leq h(t)$ 인 영역에 위치하고,

$$V(t) = \int_0^{h(t)} A(y) dy \text{이다. } F(s) = \int_0^s A(y) dy \text{ 라 두면 } V(t) = F(h(t)) \text{ 이다.}$$

$F'(s) = A(s)$ 이므로 $V'(t) = F'(h(t))h'(t) = A(h(t))h'(t)$ 이다.

$V'(t) = -kA(h(t))$ 라는 가정에 의해 $h'(t) = -k$ 이다. $h(0) = 10$ 이므로

$h(t) = 10 - kt$ 이다. 따라서 $t = \frac{10}{k}$ 일 때 물이 완전히 말라버린다.

(3-3) 별해

$h = ax^2$ 로부터 수면의 반지름 $x = x(h) = \sqrt{\frac{h}{a}}$ 을 얻는다. 따라서

$A = A(h) = \pi x^2 = \frac{\pi h}{a}$ 이다. 그러므로 가정에 의해 $V'(t) = -\frac{k\pi}{a}h(t)$ ---(1)이다. 한편, 그릇의

물은 $0 \leq y \leq h = h(t)$ 인 영역에 존재하므로

$$V(t) = \int_0^{h(t)} A(y)dy = \int_0^{h(t)} \frac{\pi y}{a} dy = \frac{\pi}{2a}(h(t))^2$$

이다. 양변을 미분하면 $V'(t) = \frac{\pi}{a}h(t)h'(t)$ ---(2)이다. (1)과 (2)로부터 $h'(t) = -k$ 이다.

$h(0) = 10$ 이므로 $h(t) = 10 - kt$ 이다. 따라서 $t = \frac{10}{k}$ 일 때 물이 완전히 말라버린다.

[문제 4] (25점)

(4-1) (10점)

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\theta \leq 1$, $1 \leq \sec\theta \leq \sqrt{2}$ 이다.

따라서 $1 \leq \sec^2\theta \leq 2$ 이므로 $e^{x \tan\theta} \leq e^{x \tan\theta} \sec^2\theta \leq 2e^{x \tan\theta}$ 이다.

$-\frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{\pi}{4}$ 까지 적분을 취하면 $\frac{1}{2}G(x) \leq F(x) \leq G(x)$ 이다.

(4-2) (15점)

제시문 (가)로부터 $G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x \tan\theta} \sec^2\theta d\theta = \left[\frac{1}{x} e^{x \tan\theta} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ 를 얻는다.

$x > 0$ 이고 \ln 은 증가함수이므로 (4-1)에서 주어진 부등식 $\frac{1}{2}G(x) \leq F(x) \leq G(x)$ 으로부터

$\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2}xG(x)\right) \leq \frac{1}{x} \ln(xF(x)) \leq \frac{1}{x} \ln(xG(x))$ 을 얻는다.

한편 $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2}xG(x)\right) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \ln(xG(x))$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{2} = 0$ 이므로

구하는 극한값은 제시문 (다)에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x F(x)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x G(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(e^x - e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(e^x(1 - e^{-2x})) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2x})}{x}\right) = 1\end{aligned}$$