2015학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오후) 출제 의도 및 해설

[문제 1] (20점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 원, 타원, 쌍곡선에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

두 점에서 만나는 두 원이 있을 때, 두 원 중 한 원 위에 있거나 내부에 있는 점들 중에서 두 원까지의 거리가 같은 점의 집합을 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 좌표평면에서 한 점과 원까지의 거리에 대한 정의를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

창작

3. 논제 해설

(1-1)은 중심이 A 이고 반지름이 r 인 원 C 가 있을 때, 점 P 에서 원 C 까지의 거리를 $\overline{PA}$ 와 r 로 표현하는 것이다. 제시문에서 원과 점과의 거리에 대한 정의에 의해 점 P 가 원의 위에 있을 때, 내부에 있을 때, 외부에 있을 때로 구분하여 구할 수 있다.

(1-2)는 두 점에서 만나는 두 원 C_1 과 C_2 가 있을 때, 원 C_2 위에 있거나 내부에 있는 점들 중에서 두 원 C_1 과 C_2 까지의 거리가 같은 점의 집합을 S 라 하고 S 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하는 것이다. 점 P 가 두 원의 교점에 있을 때, C_1 의 외부에 있을 때와 내부에 있을 때로 구분하여 (1-1)의 결과를 적용하면 집합 S 는 교점에서 만나는 타원과 쌍곡선으로 둘러싸인 닫힌 영역임을 알 수 있다. 따라서 타원과 쌍곡선의 방정식을 구하고 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구할 수 있다.

4. 평가 기준

- 제시문 이해 능력
- 조건에 따른 분석 능력

- 타원과 쌍곡선의 방정식을 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) $\left|\overline{PA}-r\right|$ 혹은 $\begin{cases}\overline{PA}-r & (P\text{가 원 } C \text{ 외부에 있을 때}) \\ r-\overline{PA} & (P\text{가 원 } C \text{ 내부에 있을 때}) \\ 0 & (P\text{가 원 } C \text{ 위에 있을 때})\end{cases}$

(1-2) (15점) 두 원 C_1 과 C_2 의 중심은 각각 $A(-2,0)$ 와 $B(2,0)$ 이다. 원 C_2 위에 있거나 내부에 있으며 두 원 C_1 과 C_2 에서 거리가 같은 점을 P 라 하자. 문제(1-1)의 결과에 의해 다음과 같은 두 등식이 만들어진다.

(i) P가 원 C_1의 외부, 원 C_2의 내부에 있을 때,

$$\overline{PA}-5=3-\overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}+\overline{PB}=8$$

이다. 즉, A, B를 두 초점으로 하고 거리의 합이 $2a=8$로 일정한 타원이므로

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

이다.

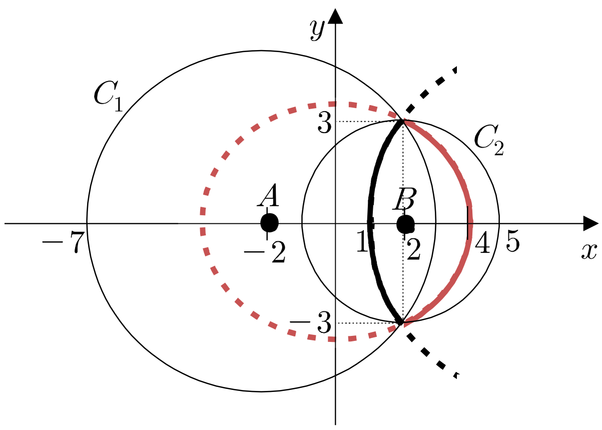
(ii) P가 원 C_1의 내부, 원 C_2의 내부에 있을 때,

$$5-\overline{PA}=3-\overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}-\overline{PB}=2$$

이다. 즉, A, B를 두 초점으로 하고 거리의 차가 $2a=2$로 일정한 쌍곡선이므로

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

이다.



두 원 C_1 과 C_2 의 교점 $(x,y)=(2,3),\ (2,-3)$ 은 문제의 조건을 만족하고, (i)과 (ii)에서

구한 타원과 쌍곡선은 주어진 두 원 C_1 과 C_2 의 교점 $(2,3)$ 을 지나므로, 구하는 회전체의 부피는 다음과 같다.

$$V=\pi\int_1^2 y_{쌍}^2 dx+\pi\int_2^4 y_{타}^2 dx=3\pi\int_1^2(x^2-1)dx+12\pi\int_2^4\left(1-\frac{1}{16}x^2\right)dx$$
$$=3\pi\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2+12\pi\left[x-\frac{1}{48}x^3\right]_2^4=4\pi+10\pi=14\pi$$

[문제 2] (25점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 지수함수와 로그함수 및 무리함수의 미분법, 합성함수의 미분법, 접선의 방정식, 음함수 또는 역함수의 그래프의 개형에 관한 내용을 이해하고 정리할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

음함수 또는 역함수 형태로 주어진 함수의 도함수를 합성함수의 미분법을 이용하여 구하는 것, 도함수를 이용하여 접선에 관련된 정보 및 그래프의 개형에 관한 정보를 얻어내는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 합성함수의 미분법을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학II』교과서, ㈜금성출판사, 135쪽

3. 논제 해설

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 가 조건 (b)와 같이 음함수 또는 역함수 형태로 주어졌고, $\ln f(x)$ 와 $\sqrt{1-(f(x))^2}$ 가 잘 정의되도록 하기 위해 $f(x)$ 의 공역을 구간 $(0,1)$ 로 제한하였다.

(2-1)에서는 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수 $f'(x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내는 문제이다. 조건 (b)의 좌변에서 y 가 x 의 함수이므로, 좌변은 합성함수이다. 합성함수의 미분법을 이용하여 양변을 x 에 대해 미분한 뒤, y 또는 $f(x)$ 가 나오는 부분을 최대한 간단하게

정리하면 된다.

(2-2)에서는 $P(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 구하고, 이를 이용하여 $f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 Q를 구하고, 이를 이용하여 $\overline{PQ}$를 구한다. 이 과정에서 (2-1)의 내용을 이용하여 $\dfrac{f(t)}{f'(t)} = -\sqrt{1-(f(t))^2}$ 임을 이용해야 $\overline{PQ}$의 값을 구할 수 있다.

(2-3)을 풀기 위해서는 조건 (b)의 등식의 양변이 모두 ∞ 로 발산한다는 사실을 먼저 얻어야 하고, 조건 (a)를 이용하여 좌변에서 $\ln\left(1+\sqrt{1-(f(x))^2}\right)$와 $\sqrt{1-(f(x))^2}$ 가 모두 0과 1 사이에 있는 값임을 파악해야 한다. 이로부터 $-\ln f(x)$가 ∞ 로 발산함을 얻을 수 있고, 극한값 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 이 0임을 얻는다. 두 번째 극한값을 얻기 위해서는 조건 (b)의 등식의 양변에 지수함수를 취하고 $e^x f(x)$ 의 식을 유도한 뒤 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

4. 평가 기준

- 로그함수, 지수함수, 무리함수와 합성함수의 미분법을 이해하고 활용하는 능력
- 접선의 방정식을 구하고, 이와 관련된 기하학적 정보를 얻는 능력
- 함수의 극한을 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (8점) 등식 (b)의 양변을 x 에 대해 미분하면

$$\left(-\frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}\,(1+\sqrt{1-y^2}\,)} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

이고, 괄호 안의 수식을 정리하면 $-\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ 이다. 그러므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 이다.

(별해) 다음과 같이

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(-\ln y + \ln\left(1+\sqrt{1-y^2}\,\right) - \sqrt{1-y^2}\right) = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

를 계산하고, 역함수의 미분법 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$ 을 이용해도 좋다.

(2-2) (7점) 점 $P(t, f(t))$에서 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

이다. 위의 식에 $y = 0$을 대입하면 $x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)} = t + \sqrt{1-(f(t))^2}$ 이다. 그러면

$$Q = \left(t + \sqrt{1-(f(t))^2}, 0\right)$$

이므로, 선분 PQ의 길이는 1이다.

(2-3) (10점) $x \to \infty$ 일 때 등식 (b)의 우변은 ∞로 발산한다. 그런데 조건 (a)에 의하면 좌변에서

$$0 < \sqrt{1-(f(x))^2} < 1 \text{ 이고 } \quad 0 < \ln\left(1 + \sqrt{1-(f(x))^2}\right) < \ln 2$$

이다. 따라서 $x \to \infty$ 일 때 좌변이 ∞로 발산하려면 $\lim_{x \to \infty}(-\ln f(x)) = \infty$ 이어야 한다.

그러므로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

이다. 그리고 등식 (b)의 양변에 지수함수를 취하고 정리하면

$$e^x f(x) = \left(1 + \sqrt{1-(f(x))^2}\right) e^{-\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

을 얻는다. 이 등식의 양변에 $x \to \infty$인 극한을 취하고 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$임을 이용하면

$$\lim_{x \to \infty} e^x f(x) = \frac{2}{e}$$

을 얻는다.

(별해) $0 < x \le 1$일 때 $g(x) = -\ln x + \ln\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right) - \sqrt{1-x^2}$ 라 정의하자. (2-1)의 풀이에 의해 $g'(x) < 0$이므로, $y = g(x)$는 $y = f(x)$의 역함수로 볼 수 있다. 그런데

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$$

이므로, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$이다. $\lim_{x \to \infty} e^x f(x) = \dfrac{2}{e}$ 의 증명은 위와 동일하다.

[문제 3] (25점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 좌표공간에서 두 점 사이의 거리, 직선의 매개변수 방정식, 평면의 방정식, 법선벡터에 관한 내용을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

좌표공간에서 거리에 관련된 양의 최대 최소를 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 공식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『기하와 벡터』교과서, ㈜교학사, 100쪽

3. 논제 해설

(3-1)은 좌표공간에서 거리에 관련된 양을 주어진 점들의 좌표를 이용하여 2차 다항함수로 전개한 뒤, 이 함수의 최소점을 구하는 문제이다. 이 2차 다항함수를 완전제곱식의 형태로 변형하여 제곱의 합이 최소가 되는 점을 얻을 수 있다.

(3-2)에서는 평면 위에 제한된 점에 대해 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점을 구하는 문제이다. 이를 위해 제곱의 합을 세 변수의 완전제곱식의 합을 유도하고, 제곱의 합이 최소가 되는 점은 주어진 평면과 구가 접하는 점을 찾는 문제로 바꾼다. 접점을 찾기 위해서는 평면의 법선벡터를 방향벡터로 가지는 직선의 방정식을 도입한다.

4. 평가 기준

- 기하적인 양을 2차 다항식으로 유도하고, 최소점을 구하는 능력
- 최대 최소 문제를 기하 문제로 변환하고, 공간도형의 지식을 활용하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(3-1) (10점) P의 좌표를 (x, y, z)이라고 하면

$$
\begin{aligned}
&\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2 \\
&=(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2+(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2 \\
&\quad+(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2 \\
&=3x^2-2(a_1+b_1+c_1)x+3y^2-2(a_2+b_2+c_2)y+3z^2-2(a_3+b_3+c_3)z \\
&\quad+a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2+a_3^2+b_3^2+c_3^2 \\
&=3\left(x-\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2+3\left(z-\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)^2+\text{상수}
\end{aligned}
$$

이 값이 최소가 되게 하는 P 의 좌표는 $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$ 이다.

(3-2) (15점) 문제 (3-1)의 계산에서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 이 상수인 점 P 의 집합은 삼각형 ABC 의 무게중심 $(1,1,1)$ 을 중심으로 하는 구이다. 따라서 구하려는 점 P 는 $(1,1,1)$ 을 중심으로 하는 구가 평면 $x+2y+3z=0$ 에 접할 때의 접점이다.

$(1,1,1)$ 을 지나고 평면에 수직인 직선의 방정식은

$$x=1+t, \quad y=1+2t, \quad z=1+3t$$

이고, 이 직선과 평면의 교점을 구하기 위해 이 식을 평면의 식에 대입하면

$$(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)=0$$

으로부터 $t=-\frac{3}{7}$ 을 얻는다. 따라서 $P\left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ 이다.

[문제 4] (30점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 함수의 합성, 구간별로 정의된 함수, 점화식, 수열의 수렴과 발산에 대한 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

구간별로 정의된 함수의 합성을 이해하고 합성함수의 그래프의 개형으로부터 점화식으로 정의된 수열의 수렴과 발산의 정보를 알아내는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

부분수열의 수렴과 발산에 대한 정보를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학 I 익힘책』교과서, 천재교육, 125쪽을 참고하여 창작

3. 논제 해설

(4-1)은 합성함수의 그래프를 그리는 것이다. 구간별로 정의된 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다.

(4-2)는 $a_4 - a_6$이 최대가 되는 수열의 초항 $a_1 = k$의 값을 구하는 것이다. 주어진 식을 합성함수와 연관시켜 (4-1)의 그래프의 개형으로부터 수열의 초항의 값을 찾을 수 있다.

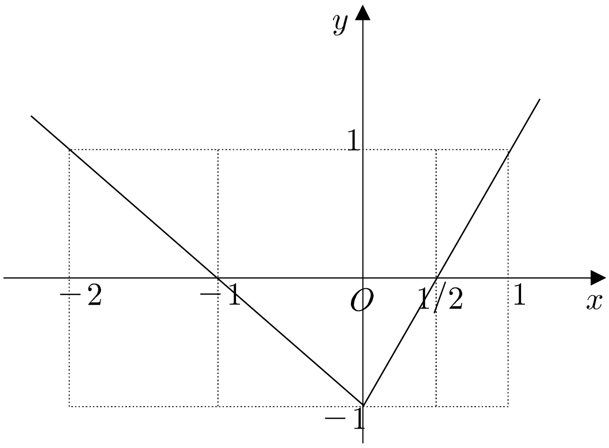
(4-3)은 점화식으로 주어진 수열이 두 가지 조건을 만족하는 열린구간 (a, b)를 구하는 것이다. 수열이 수렴 또는 발산하는 수열의 초항 $a_1 = k$의 값을 점화식을 주는 함수의 그래프와 연관시켜 파악하여 두 조건에 맞는 열린구간을 구할 수 있다.

4. 평가 기준

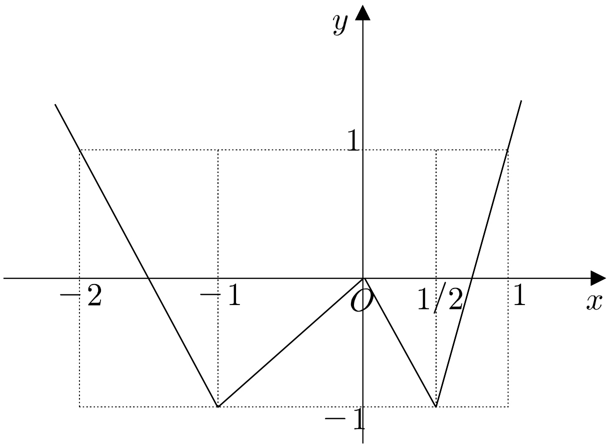
- 함수의 합성을 이해하고 구간별로 정의된 함수의 그래프를 그릴 수 있는 능력
- 점화식으로 주어진 수열이 수렴 또는 발산하는 초기조건을 점화식을 주는 함수의 그래프와 연관해서 파악할 수 있는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(4-1) (10점) $x \le -1,\ x \ge \frac{1}{2}$ 일 때 $f(x) \ge 0$ 이고, $-1 < x < \frac{1}{2}$ 일 때 $f(x) < 0$ 이므로



$$f(f(x)) = \begin{cases} 2(-x-1)-1=-2x-3 & (x \le -1) \\ -(-x-1)-1=x & (-1<x<0) \\ -(2x-1)-1= -2x & (0 \le x < \frac{1}{2}) \\ 2(2x-1)-1=4x-3 & (x \ge \frac{1}{2}) \end{cases}$$ 이다. 그림은 다음과 같다.



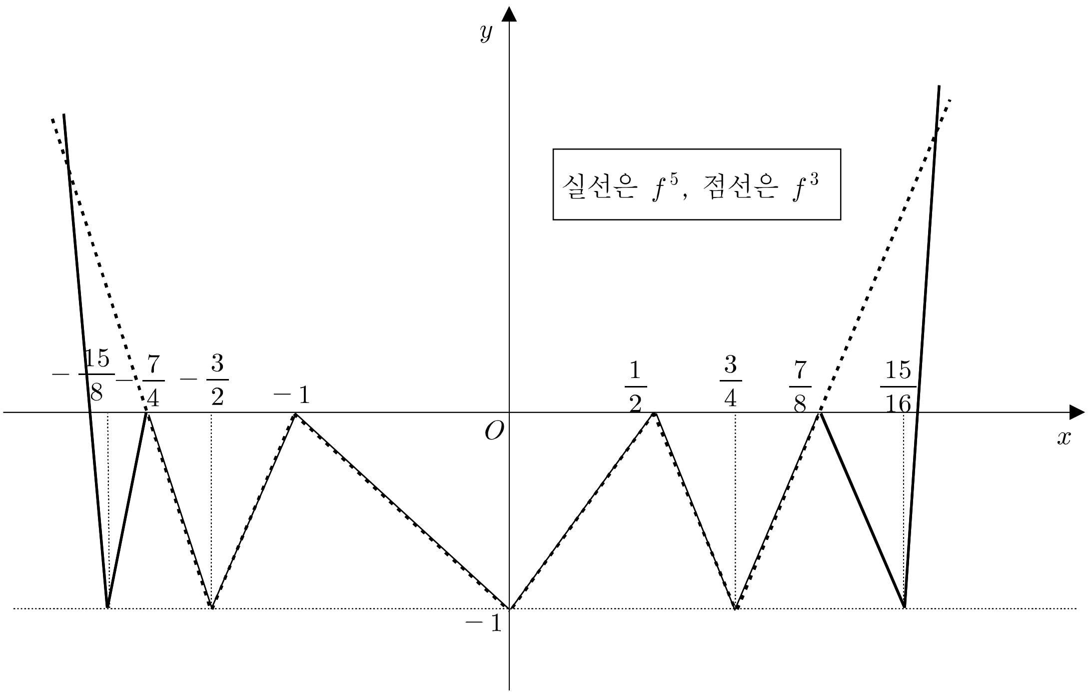
(별해) $f(x)<0$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - f(x)$ 라 쓰자. 그러면 f 의 그래프 중에서 x 축 아래에 있는 부분을 직선 $y = -1/2$ 에 대해 대칭시켜 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프의 일부분을 얻는다. 또, f 의 그래프 중에서 x 축 위에 있는 부분의 기울기를 2배로 하고 -1 만큼 평행이동하면 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프의 남은 부분을 얻는다. 구하려는 그래프는 위의 그림과 같다.

(4-2) (10점) $a_4 - a_6 = a_4 - f(f(a_4))$ 이다. $y=(f \circ f)(x)$ 의 그래프 위의 점 (x, y) 중에서

$x-y$ 의 값을 최대로 하는 점은 $(\frac{1}{2}, -1)$ 이다. 이때 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

$a_4 = (f \circ f)(a_2) = \frac{1}{2}$ 은 $a_2 = -\frac{7}{4}$ 또는 $\frac{7}{8}$ 일 때 얻어지는데, $a_2 = -\frac{7}{4}$ 은 불가능하므로 $a_2 = \frac{7}{8}$ 이다. 즉 $k = -\frac{15}{8}$ 또는 $\frac{15}{16}$ 일 때이다.

(별해) 표현을 간단하게 하기 위해 $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } n\text{개}}$ 라 하자. (4-1)의 별해와 같이 진행하면 $f^3(x)$ 의 그래프와 $f^5(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$k > 0$ 이면 $k = \frac{15}{16}$ 일 때 $a_4 - a_6 = f^3(k) - f^5(k)$ 가 최대가 되고, $k < 0$ 이면 $k = -\frac{15}{8}$ 일 때 최대가 된다. 두 경우 모두 $a_4 = \frac{1}{2}$ 이고 $a_6 = -1$ 이므로, $k = -\frac{15}{8}$ 또는 $\frac{15}{16}$ 일 때 $a_4 - a_6$ 의 값이 최대가 된다.

(4-3) (10점)

(1) $k > 1$ 이면 $b_n = a_{2n-1}$ 은 점화식 $b_1 = k$, $b_{n+1} = 4b_n - 3$ 을 만족하므로

$$b_n = 1 + (k-1)4^{n-1}$$

이다. 따라서 $\{a_{2n-1}\}$ 은 발산한다.

(2) $k=1$ 일 때, $a_n=1\ (n\ge 2)$ 이므로 $\{a_n\}$ 과 $\{a_{2n-1}\}$ 은 모두 수렴한다.

(3) $0<k<1$ 일 때, 충분히 큰 n 에 대해 $-1\le a_n\le 0$ 이다. 이 때 $a_{n+1}=-a_n-1$ 은 $-1\le a_{n+1}\le 0$ 을 만족하므로 $a_{n+2}=-a_{n+1}-1=a_n$ 이다. 그러므로 $\{a_{2n-1}\}$ 은 항상 수렴하지만, $\{a_n\}$ 은 어떤 N에 대해 $a_N=-\dfrac{1}{2}$ 일 때만 수렴한다.

(a) $0<k\le\dfrac{1}{2}$ 일 때, $-1<f(k)\le 0$ 이고, 이 중 $f(k)=-\dfrac{1}{2}$ 이 되는 k의 값은 $k=\dfrac{1}{4}$ 이다. 즉, $\{a_n\}$ 이 수렴하는 k의 값은 $k=\dfrac{1}{4}$ 뿐이다.

(b) $\dfrac{1}{2}<k\le\dfrac{3}{4}$ 일 때, $0<f(k)\le\dfrac{1}{2}$ 이고, 이 중 $\{a_n\}$ 이 수렴하는 k의 값은 $f(k)=\dfrac{1}{4}$ 을 만족하는 $k=\dfrac{5}{8}$ 뿐이다.

(c) 이 작업을 반복하면, $0\le k<1$ 일 때, $\{a_n\}$ 이 수렴하는 k의 값은

$$1-\frac{3}{2^{n+1}}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

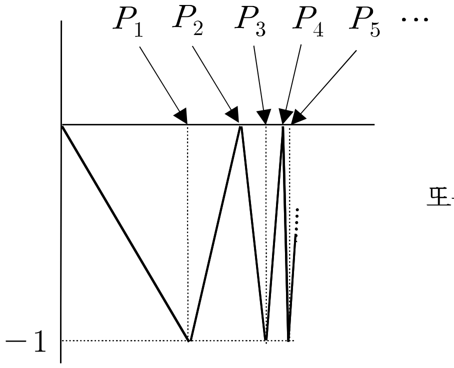
이다.

따라서, $\{a_n\}$ 은 발산하지만 $\{a_{2n-1}\}$ 은 수렴하는 $k>0$ 는 열린구간 $(0,1)$ 에서 다음 집합을 제외한 부분이다.

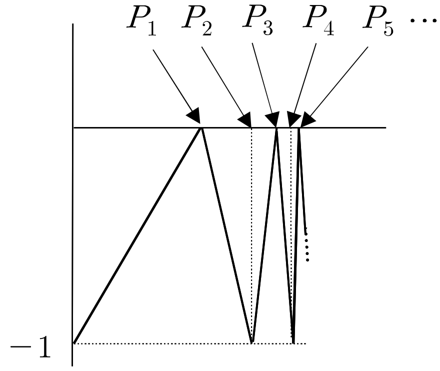
$$\left\{\frac{1}{4},\frac{5}{8},\cdots,1-\frac{3}{2^{n+1}},\cdots\right\}$$

그러므로 문제의 조건을 만족하는 열린구간은 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right)$ 이다.

(별해) $k\ge 1$ 이면 $b_n=1+(k-1)4^{n-1}$ 이므로, $\{b_n\}$ 은 $k=1$ 일 때 수렴하고 $k>1$ 일 때 ∞ 로 발산한다. $0<k<1$ 이면 충분히 큰 n 에 대해 $-1\le a_n\le 0$ 이다. (왜냐하면 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ 일 때 $a_n=1+(k-1)2^{n-1}$ 이기 때문이다.) 이 때 $a_{n+1}=-a_n-1$ 은 구간 $[-1,0]$ 의 값이므로, $a_{n+2}=a_n$ 이다. 따라서 $\{a_{2n-1}\}$ 은 항상 수렴하지만, $\{a_n\}$ 은 어떤 N에 대해 $a_N=-\dfrac{1}{2}$ 일 때만 수렴한다. (4-2)의 별해에 의해 $x>0$ 인 영역에서 $f^n(x)=(\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{f\text{가 }n\text{개}})(x)$ 의 그래프 중에서 x 축 아래의 부분은 다음과 같다.



또는



$$\left(P_1 = \frac{1}{2},\ P_2 = \frac{3}{4},\ P_3 = \frac{7}{8},\ P_4 = \frac{15}{16},\ P_5 = \frac{31}{32}\right)$$

이 중에서 $a_{n+1} = f^n(k) = -\frac{1}{2}$ 인 k의 값은

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8} = \frac{5}{8}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16} = \frac{13}{16}, \ \cdots,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1-\frac{3}{2^{n+1}}, \ \cdots$$

이다. 따라서 k가 구간 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{5}{8}, \frac{13}{16}\right)$, $\cdots$ 의 원소일 때 $\{a_n\}$은 발산하지만 $\{a_{2n-1}\}$은 수렴한다. 그러므로 문제의 조건을 만족하는 열린구간은 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$이다.