2015학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오전) 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 이항정리와 이항계수에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

이항계수의 여러 가지 성질을 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 이항계수의 정의를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학』교과서, ㈜지학사, 297쪽~298쪽

3. 논제 해설

(1-1)은 이항계수 ${}_{2n}C_n$가 짝수임을 보이는 것이다. 이항정리

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k$$

와 이항계수의 기본성질 ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$을 이용하거나 혹은 파스칼의 정리

$${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$$

를 사용하거나 혹은 이항계수의 정의를 활용하는 등 여러 가지 방법이 있다.

(1-2)는 $n=2^k$ (k는 양의 정수)이고 정수 b가 $1 \le b \le n-1$을 만족할 때, $\dfrac{n+b}{b}$의 기약분수의 분모와 분자가 모두 홀수임을 보이고, $f(2^k)$은 4의 배수가 아님을 보이는 것이다. 첫 번째는 모든 정수가 $2^i \times c$ (c는 홀수)꼴로 표현됨을 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 두 번째는 첫 번째의 결과와 (1-1)의 결과를 이용하면 된다.

(1-3)은 $\dfrac{f(n)}{f(n-1)}$을 n의 식으로 나타내고 $f(2^{15}-1)$이 2^m의 배수가 되는 양의 정수

m의 최댓값을 구하는 것이다. (1-1)과 (1-2)의 결과 및 n 으로 표현된 식을 활용하면 된다.

4. 평가 기준

- 이항정리 및 이항계수의 기본성질의 이해 능력
- 모든 정수를 $2^i \times$(홀수)꼴로 나타낼 수 있는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) 이항정리 $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k x^k$ 로부터 $x=1$ 일 때,

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left({}_{2n}C_k + {}_{2n}C_{2n-k} \right) + {}_{2n}C_n$$

따라서 ${}_{2n}C_n = 2^{2n} - 2\sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}C_k$ 이므로 ${}_{2n}C_n$ 은 짝수이다.

(별해) 파스칼의 정리, 즉 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$ 에 의해,

$${}_{2n}C_n = {}_{2n-1}C_n + {}_{2n-1}C_{n-1} = 2 \times {}_{2n-1}C_n$$

이므로 ${}_{2n}C_n$ 은 짝수이다.

(별해) ${}_{2n}C_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+(n-1))}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)} \times \dfrac{n+n}{n} = 2 \times {}_{2n-1}C_{n-1}$ 이므로 ${}_{2n}C_n$ 은 짝수이다.

(1-2) (10점) $b = 2^i c$ (c는 홀수, $0 \le i < k$)라 두면

$$\frac{n+b}{b} = \frac{2^k + 2^i c}{2^i c} = \frac{2^i (2^{k-i} + c)}{2^i c} = \frac{2^{k-i} + c}{c} = \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}}$$

이다. 따라서
$$f(2^k) = \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2} \times \cdots \times \frac{n+(n-1)}{n-1} \times \frac{n+n}{n} = \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}} \times \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}} \times \cdots \times \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}} \times 2$$

이므로 $f(2^k)$ 는 4의 배수가 아니다.

(1-3) (10점) 등식

$$\frac{f(n)}{f(n-1)}=\frac{{}_{2n}C_n}{{}_{2n-2}C_{n-1}}=\frac{(2n)!/n!n!}{(2n-2)!/(n-1)!(n-1)!}=\frac{2(2n-1)}{n}$$

에 $n=2^{15}$를 대입하고 (1-2)의 결과를 이용하면 다음 등식을 얻는다.

$$f(2^{15}-1)=\frac{2^{15}}{2(2^{16}-1)}f(2^{15})=\frac{2^{15}}{2\times(\text{홀수})}\times2\times(\text{홀수})$$

따라서 $f(2^{15}-1)$ 을 나누는 최대 2^m의 형태는 $m=15$ 일 때이다.

[문제 2] (25점)

1. 출제의도

고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 다항함수의 접선의 방정식, 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수 구하기, 함수의 극대와 극소 판정, 다항함수의 미적분 등에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

4차 다항함수에 접하는 직선의 개수를 다양한 조건에서 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 미분계수가 접선의 기울기를 나타냄을 설명하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학II』교과서, ㈜금성출판사, 117쪽

3. 논제 해설

(2-1)은 함수 $f(x)=(x^2-3)^2$ 의 그래프 위의 점 $(t,(t^2-3)^2)$ 에서 접선이 점 $P(a,b)$ 를 지날 때, t,a,b 의 관계식을 구하는 것이다. 제시문의 내용과 다항함수의 미분에 의해 관계식이 t 에 대한 4차 방정식임을 쉽게 얻을 수 있다.

(2-2)는 $a=1$ 일 때 (2-1)의 상황에서 b 의 값의 범위에 따라 접선의 개수를 구하는 것이다. 이것은 (2-1)에서 구한 t 에 대한 4차 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하는 문제와 같기 때문에 미분을 통하여 조건에 따라 접선의 개수를 구할 수 있다.

(2-3)은 $2 \le a \le 3$ 일 때 (2-1)의 상황에서 접선이 4개 존재하는 점 $P(a,b)$의 집합을 S라 할 때, S의 넓이를 구하는 것이다. 이것은 (2-2)에서와 같이 (2-1)에서 구한 t에 대한 4차 방정식의 서로 다른 네 실근을 가지는 문제와 같기 때문에 미분을 이용하여 집합 S를 구할 수 있고 다항함수의 적분을 통해 S의 면적을 구할 수 있다.

4. 평가 기준

- 논제 이해 능력
- 4차 방정식의 실근의 개수를 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (5점) 점 $\left(t, (t^2-3)^2\right)$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식은

$$y = t^4 - 6t^2 + 9 + (4t^3 - 12t)(x - t)$$

이다. 이 직선이 점 $P(a,b)$ 를 지나므로

$$b = t^4 - 6t^2 + 9 + (4t^3 - 12t)(a - t)$$

이 성립한다.

(2-2) (10점) 편의상

$$g(t) = 3t^4 - 4t^3 - 6t^2 + 12t + b - 9$$

라 두자. 점 $(t, f(t))$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 점 $P(1,b)$ 를 지날 때, t는 방정식 $g(t) = 0$ 의 실근이다. 접선의 개수를 구하기 위해 t의 방정식 $g(t) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 파악한다. 이를 위해 $g(t)$ 의 그래프의 개형을 그려본다.

$$g'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 12t + 12 = 12(t+1)(t-1)^2$$

이므로 $t < -1$ 일 때 $g'(t) < 0$ 이고, $t \in (-1,1) \cup (1,\infty)$ 일 때 $g'(t) > 0$ 이다. 그리고

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = \infty = \lim_{t \to \infty} g(t)$$

이다. 따라서 방정식 $g(t) = 0$ 의 서로 다른 실근의 수는

$b - 20 = g(-1) < 0$ 일 때 2개,

$b - 20 = g(-1) = 0$ 일 때 1개,

$b - 20 = g(-1) > 0$ 일 때 0개이다.

이제 서로 다른 접점에서 하나의 접선이 생기는 경우를 찾자. 서로 다른 두 점

$P(t_1, (t_1^2-3)^2)$ 와 $Q(t_2, (t_2^2-3)^2)$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식은 각각

$$y=(4t_1^3-12t_1)x - 3t_1^4+6t_1^2+9, \qquad y=(4t_2^3-12t_2)x-3t_2^4+6t_2^2+9$$

이다. 두 직선이 같은 경우는 기울기와 y절편이 모두 같을 때이다. 즉,

$$t_1^3-3t_1=t_2^3-3t_2 \text{ 이고 } \quad t_1^4-2t_1^2-3=t_2^4-2t_2^2-3$$

일 때이다. 이 방정식을 다시 쓰면

$$(t_1-t_2)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2-3)=0, \quad \text{----------} \ (1)$$

$$(t_1-t_2)(t_1+t_2)(t_1^2+t_2^2-2)=0 \quad \text{---------} \ (2)$$

이다. $t_1 \neq t_2$ 이므로 등식 (2)로부터 $t_2=-t_1$ 이거나 $t_1^2+t_2^2=2$ 이다.

$t_1^2+t_2^2=2$ 이면 등식 (1)에 의해

$$0=t_1^2+t_1t_2+t_2^2-3=t_1t_2-1$$

이다. 따라서 $t_1^2+\dfrac{1}{t_1^2}=2 \ (t_1\neq 0)$이고, 이를 풀면 $t_1=t_2=\pm 1$ 이 되어 $t_1 \neq t_2$ 임에 모순이다. 그러므로 $t_2=-t_1$ 이다. 이를 등식 (1)에 대입하면

$$0=t_1^2+t_1t_2+t_2^2-3=t_1^2-3$$

이 되어 $t_1=\pm\sqrt{3}$, $t_2=\mp\sqrt{3}$ 이다. 따라서 점 $(1, b)$를 지나고 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선이 서로 다른 두 접점을 가질 때, 접점은 $(\pm\sqrt{3}, 0)$ 이고 접선의 방정식은 $y=0$ 이다. 이 경우는 $b=0$ 일 때이다. 그러므로 구하려는 (서로 다른) 접선의 개수는

(i) $b<0$ 이거나 $0<b<20$ 이면 2개,

(ii) $b=0$ 이거나 $b=20$ 이면 1개,

(iii) $b>20$ 이면 0개이다.

(2-3) (10점) 편의상

$$G(t)=3t^4-4at^3-6t^2+12at+b-9$$

라 두자. 점 $(t, f(t))$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하고 점 $P(a,b)$ 를 지나는 서로 다른 직선이 4개 존재하면 방정식 $G(t)=0$ 의 서로 다른 실근이 4개 존재해야 한다.

$$G'(t)=12t^3-12at^2-12t+12a=12(t+1)(t-1)(t-a)$$

이고 $2\le a\le 3$ 이므로, $t\in(-\infty, -1)\cup(1, a)$ 일 때 $G'(t)<0$ 이고, $t\in(-1,1)\cup(a,\infty)$ 일 때 $G'(t)>0$ 이다. 그리고 $\lim_{t\to-\infty} G(t)=\infty=\lim_{t\to\infty} G(t)$ 이다.

따라서 방정식 $G(t)=0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 필요충분조건은

$$G(-1)<0 \text{ 이고 } G(1)>0 \text{ 이고 } G(a)<0$$

이다. 한편

$$G(-1)-G(a)=a^4-6a^2-8a-3=(a+1)^3(a-3)\le 0$$

이므로, $G(t)=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 필요충분조건은

$$G(1)>0 \text{ 이고 } G(a)<0$$

이다. 이를 다시 쓰면

$$12-8a<b<a^4-6a^2+9$$

이다. 그런데 (2-2)의 풀이에 따르면 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선이 서로 다른 두 접점을 가지는 경우는 $b=0$ 뿐이다. 그러므로 $2\le a\le 3$일 때 서로 다른 네 접선이 존재할 필요충분조건은

$$12-8a<b<a^4-6a^2+9 \text{ 이고 } \quad b\ne 0$$

이다. 선분은 영역의 넓이에 영향을 주지 않으므로, S의 넓이를 구할 때 $b\ne 0$인 조건은 무시해도 좋다. 따라서 S의 넓이는

$$\int_2^3 (a^4-6a^2+9-(12-8a))da=\left[\frac{a^5}{5}-2a^3+4a^2-3a\right]_2^3=\frac{106}{5}$$

이다.

[문제 3] (25점)

1. 출제의도

고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 좌표공간에서 벡터의 내적, 평면의 방정식, 구의 방정식, 정사영 등에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

좌표공간에서 구가 평면에 의해 잘린 상황에서 부피, 정사영의 넓이 등의 정보를 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 두 벡터의 내적의 정의를 주었다.

제시문 (나)는 좌표공간에서 평면의 벡터방정식을 제공하였다.

제시문 (다)는 좌표공간에서 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 구의 벡터방정식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 고등학교『기하와 벡터』교과서, ㈜금성출판사, 140쪽 발췌 수정
제시문 (나) : 고등학교『기하와 벡터 익힘책』교과서, ㈜금성출판사, 128쪽 발췌 수정
제시문 (다) : 고등학교『기하와 벡터 익힘책』교과서, 성지출판㈜, 130쪽 발췌 수정

3. 논제 해설

문제 구성에서 주어진 벡터부등식과 벡터방정식을 제시문을 이용하여 해석하면, 좌표공간에 서로 다른 두 점 P, Q와 선분 PQ를 $3:1$로 내분하는 점 M이 주어졌고, 두 점 P와 Q를 지름의 양 끝점으로 하는 구가 점 M을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{PQ}$인 평면에 의해 잘린 상황을 말하고 있다.

(3-1)은 잘린 두 부분의 부피의 비를 구하는 것이다. 잘린 두 부분의 부피는 반원의 일부를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체로 파악하여 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

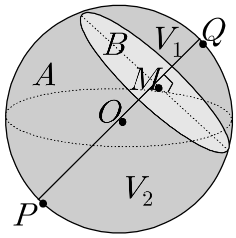
(3-2)는 평면의 법선벡터가 주어지고 구와 평면의 공통부분(원판)을 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하는 것이다. 원판의 반지름과 원판과 xy평면이 이루는 각도를 알면 이 문제를 해결할 수 있다.

4. 평가 기준

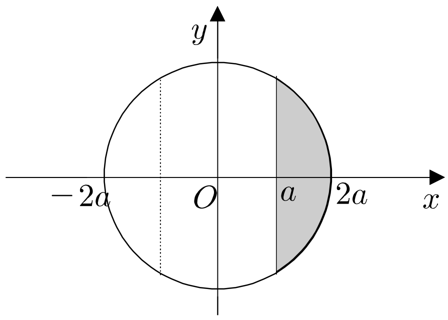
- 문제 구성에서 주어진 벡터부등식과 벡터방정식의 해석 능력
- 회전체의 부피를 정적분으로 구하는 능력
- 특정 평면과 xy평면이 이루는 각을 내적을 이용하여 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(3-1) (10점) 제시문 (다)에 의해 집합 A는 서로 다른 두 점 P와 Q를 지름의 양 끝점으로 하는 구와 그 내부이고, 제시문 (나)에 의해 집합 B는 점 M을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{PQ}$인 평면이다. <그림 1>과 같이 B에 의해 잘린 A의 두 부분의 부피를 V_1, V_2라 하자. 편의상 <그림2>와 같이 선분 PQ의 길이를 $4a$로 놓고 직선 PQ를 x축, 선분 PQ의 중점을 xy평면의 원점 O가 되도록 하자.



<그림1>



<그림2>

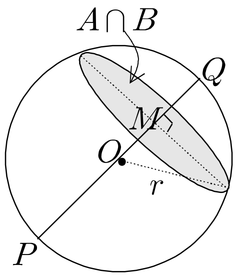
구하려는 두 부분의 부피 V_1, V_2 는 각각 <그림 2>에서 원의 일부를 x 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피이다. 원의 식은 $x^2+y^2=4a^2$ 로 주어지므로

$$V_1=\pi\int_a^{2a} y^2\,dx=\pi\int_a^{2a}(4a^2-x^2)\,dx=\pi\left[4a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{2a}=\frac{5}{3}\pi a^3$$

$$V_2=\frac{4}{3}\pi(2a)^3-V_1=\frac{32}{3}\pi a^3-\frac{5}{3}\pi a^3=\frac{27}{3}\pi a^3$$

이다. 따라서 $V_1 : V_2 = 5 : 27$ 이다.

(3-2) (15점) 먼저 $A\cap B$ 는 아래 그림과 같이 원판이다.



$|\overrightarrow{PQ}|=3$ 이므로 구의 반지름은 $r=\frac{3}{2}$ 이고 $\overline{OM}=\frac{3}{4}$ 이다. 따라서 $A\cap B$ 의 반지름은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이고 $A\cap B$ 의 넓이는 $\frac{27}{16}\pi$ 이다. 평면 $A\cap B$ 와 xy 평면이 이루는 각을 θ 라 하면, 평면 $A\cap B$ 와 xy 평면의 법선벡터가 각각 $\overrightarrow{PQ}=(1,2,2)$ 와 $\vec{k}=(0,0,1)$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{k}|}=\frac{2}{3}$$

이다. 따라서 $A\cap B$ 의 xy 평면으로의 정사영의 넓이는

$$(A \cap B\text{의 넓이}) \times \cos\theta = \frac{27}{16}\pi \times \frac{2}{3} = \frac{9}{8}\pi$$

이다.

[문제 4] (25점)

1. 출제의도

고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 일차변환과 행렬, 일차변환의 합성, 삼각함수 등에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

회전 각도가 다른 두 회전변환의 합으로 정의된 일차변환을 7번 시행하여 다시 제자리로 돌아올 때 만들어지는 선분으로 둘러싸인 영역의 최소 넓이에 관한 정보를 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 n개의 선분이 있고, 이 중 몇 개의 선분으로 둘러싸인 영역의 예를 제공하였다. 이 예는 (4-2)의 질문을 명확히 이해하는데 도움이 된다.

(다) 제시문 출처

창작

3. 논제 해설

회전 각도가 α, β $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$인 두 회전변환의 합으로 정의된 일차변환 f가 있다.

(4-1)은 f를 나타내는 행렬이 $k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$일 때, k와 θ를 α, β로 표현하는 것이다. 삼각함수의 합을 곱으로 고치는 공식을 적용하거나 기하적인 해석으로 쉽게 구할 수 있다.

(4-2)는 점 $P_1(1,0)$을 일차변환 f를 7번 시행 후 다시 P_1으로 돌아오는 상황에서 만들어지는 선분들에 의해 둘러싸인 영역의 넓이가 최소가 되는 α, β의 값을 모두 구하는 것이다.

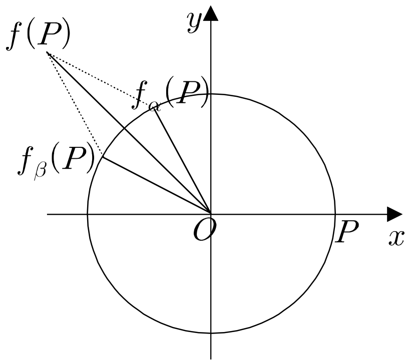
삼각방정식의 풀이로부터 네 가지 유형의 별-다각형이 생기는데 넓이가 최소인 경우를 그림을 그려보면 쉽게 찾을 수 있다.

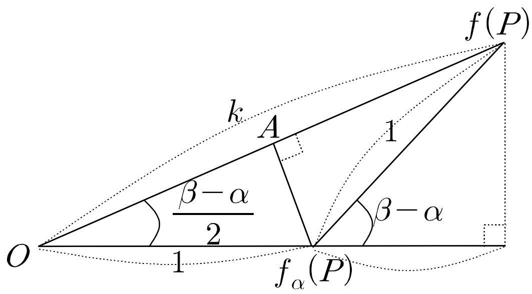
4. 평가 기준

- 삼각함수의 기본지식 적용 능력
- 주어진 상황의 기하적인 해석 능력
- 삼각방정식 풀이 능력
- 분석 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(4-1) (10점) 그림으로 분석하면 다음과 같다.





위 그림으로부터 일차변환 f의 회전각과 k는 다음으로 주어진다.

$$\theta = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ 이고 } k = 2\,\overline{OA} = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

(별해) 점 P를 원점을 중심으로 α 만큼 회전시키는 변환 f_α와 원점을 중심으로 β 만큼 회전시키는 변환 f_β를 행렬로 나타내면

$$f_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ f_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 점 P를 $f_\alpha(P)+f_\beta(P)$로 옮기는 일차변환 f의 행렬로 나타내면

$$f = f_\alpha + f_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \cos\beta & -(\sin\alpha + \sin\beta) \\ \sin\alpha + \sin\beta & \cos\alpha + \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $k = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ 이고 $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 이다.

(4-2) (15점) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$ 일 때, $0 < \frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ 이다.

$$f(P) = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P$$

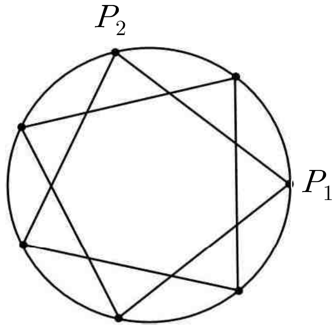
에서 조건 $f^7(P) = P$ 를 만족하려면,

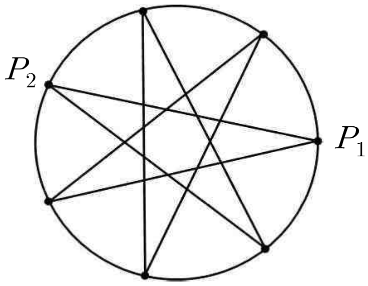
$$2^7\cos^7\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = 1 \ \Rightarrow\ \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$7\theta = 2n\pi \ \Rightarrow\ \theta = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2n\pi}{7} \ \ (n = 2, 3, 4, 5)$$

이다.

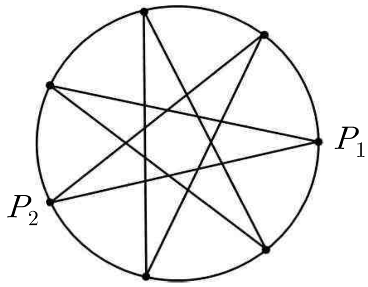
$\theta = \frac{4}{7}\pi$

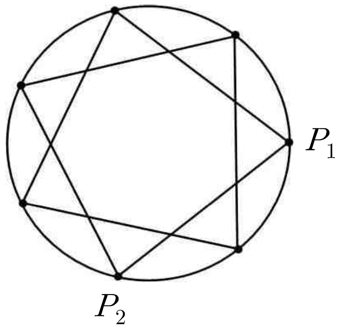




$\theta = \frac{6}{7}\pi$

$\theta = \frac{8}{7}\pi$





$\theta = \frac{10}{7}\pi$

이 중에서 주어진 영역의 넓이가 최소가 되게 하는 것은

$$\begin{cases} \dfrac{\beta-\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{6}{7}\pi,\ \dfrac{8}{7}\pi \end{cases}$$

이다. 따라서 $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$ 범위에서 가능한 값은

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{11}{21}\pi \\ \beta = \dfrac{25}{21}\pi \end{cases} \text{와} \begin{cases} \alpha = \dfrac{17}{21}\pi \\ \beta = \dfrac{31}{21}\pi \end{cases}$$

이다.