2015학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오전)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 각 문항의 답안은 반드시 해당 답란에 작성하시오.
3. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

양의 정수 n 과 $0 \le k \le n$ 인 정수 k 에 대하여, 이항계수 ${}_nC_k$ 는 n 개의 사물 중 k 개의 사물을 선택하는 조합의 수로 정의하며, 다음의 식으로 주어진다.

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} $$

(※) 양의 정수 n 에 대하여 $f(n) = {}_{2n}C_n = \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2} \times \cdots \times \frac{n+n}{n}$ 이라 하자.

(1-1) $f(n)$ 은 짝수임을 보이시오. (5점)

(1-2) $n = 2^k$ (k 는 양의 정수)이고 정수 b 가 $1 \le b \le n-1$ 을 만족할 때, $\frac{n+b}{b}$ 의 기약분수의 분모와 분자는 모두 홀수임을 보이고, 이를 이용하여 $f(2^k)$ 은 4의 배수가 아님을 보이시오. (10점)

(1-3) 정수 $n \ge 2$ 에 대하여 $\frac{f(n)}{f(n-1)}$ 을 n 의 식으로 나타내고, 이를 이용하여 $f(2^{15}-1)$ 이 2^m 의 배수가 되는 양의 정수 m 의 최댓값을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

(※) 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = (x^2-3)^2$ 을 만족한다.

(2-1) 점 $\left(t, (t^2-3)^2\right)$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 점 $P(a,b)$ 를 지날 때, b 를 t 와 a 의 식으로 나타내시오. (5점)

(2-2) 점 $P(1,b)$ 를 지나고 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 개수를 b 의 값의 범위에 따라 구하시오. (10점)

(2-3) $2 \le a \le 3$ 일 때, 점 $P(a,b)$ 를 지나고 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 4개 존재하도록 하는 $P(a,b)$ 의 집합을 S 라 하자. S 의 넓이를 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 를 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적이라고 하고 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 와 같이 나타낸다.

(나) 좌표공간에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$ 에 수직이고 위치벡터가 $\vec{a}$ 인 점 A 를 지나는 평면의 방정식은

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

이다. 이때, $\vec{n}$ 를 평면의 법선벡터라고 한다.

(다) 좌표공간에서 두 점 A, B 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 라 할 때, 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식은

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

이다.

(※) 좌표공간에 서로 다른 두 점 P, Q 가 주어졌다. 선분 PQ 를 $3:1$ 로 내분하는 점을 M 이라 하자. 부등식 $\overrightarrow{XP} \cdot \overrightarrow{XQ} \le 0$ 을 만족하는 점 X 의 집합을 A 라 하고, 등식 $\overrightarrow{XM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ 을 만족하는 점 X 의 집합을 B 라 하자.

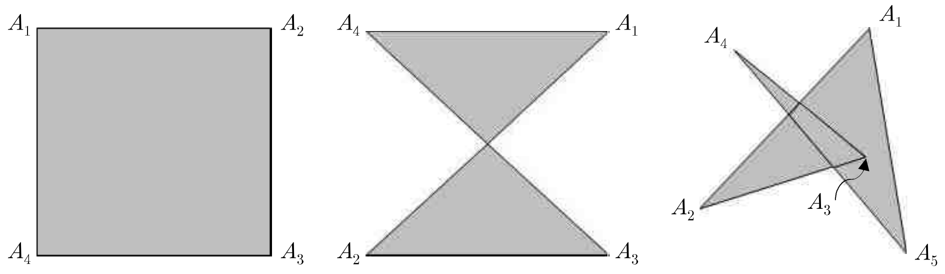
(3-1) B 에 의해 잘린 A 의 두 부분의 부피의 비를 구하시오. (10점)

(3-2) $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 2)$ 일 때, $A \cap B$ 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

좌표평면에 n개의 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이 있을 때, n개의 선분 A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1로 둘러싸인 영역을 생각할 수 있다. 다음 그림은 이러한 영역에 색칠한 몇 개의 예이다.



(※) 좌표평면의 한 점 P를 원점을 중심으로 α만큼 회전한 점을 $f_\alpha(P)$, 원점을 중심으로 β만큼 회전한 점을 $f_\beta(P)$라 할 때, 일차변환 f는 P를 점 $f_\alpha(P)+f_\beta(P)$로 옮기는 변환이다. (단, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{3\pi}{2}$ 이다.)

(4-1) 일차변환 f를 나타내는 행렬은

$$k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (k>0\ ,\ 0\le\theta<2\pi)$$

로 나타낼 수 있다. 이때, k와 θ를 각각 α와 β의 식으로 표현하시오. (10점)

(4-2) 점 $P_1(1,0)$에 대하여 $P_{n+1}=f^n(P_1)=(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{f\text{가 } n\text{개}})(P_1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$이라고 하자. 일차변환 f가 $P_1=f^7(P_1)$을 만족할 때, 선분 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_1로 둘러싸인 영역의 넓이가 최소가 되도록 하는 α, β의 값을 모두 구하시오. (15점)

<연 습 장>

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>