2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[수학] (60점)

[문제 1] (30점)

1. 출제의도

회전변환에 의해 주어진 원은 중심이 회전변환만큼 이동하고 반지름이 같은 원으로 변환된다는 사실을 파악할 수 있는지, 원에서 주어진 기울기를 갖고 접하는 직선의 식을 구할 수 있는지, 삼각함수의 정의를 알고 활용할 수 있는지, 삼각함수의 극한을 이용하여 도형으로부터 식을 도출하고 식의 극한을 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 기울기가 m $(m<0)$인 직선 l ([그림 1] 참고)이 제1사분면에서 접하고 있다. 이 원을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 원이 직선 l과 두 점 A, B에서 만나는 상황에서([그림 2] 참고) 선분 AB와 호 $\widehat{AB}$로 둘러싸인 영역의 넓이 S_θ와 선분 AB의 길이 $f(\theta)$를 가지고 접선의 식, 삼각함수의 정의, 삼각함수의 극한 정리, 극한값을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 좌표평면에서 한 점과 그 점을 지나지 않는 직선 사이의 거리 공식을 제공하였다.

제시문 (나)는 삼각함수의 미분법에서 기본이 되는 삼각함수의 극한 정리를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 『수학』 교과서, (주)지학사, 158쪽~159쪽
제시문 (나) : 『수학II』 교과서, (주)금성출판사, 86쪽

3. 논제 해설

(1-1)은 제1사분면에서 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접하고 기울기 m $(m<0)$을 갖는 직선 l ([그림 1] 참고)의 y절편을 구하는 것이다. 제시문 (가)에 주어진 거리 공식을 이용하거나 혹은 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선을 x축으로 1만큼 평행 이동시켜 구할 수 있다.

(1-2)와 (1-3)은 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨 원이 기울기가 m 인 직선 l 과 두 점 A, B 에서 만나는 상황에서([그림 2] 참고), (1-2)는 선분 AB 와 호 $\widehat{AB}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S_θ 가 θ 가 변함에 따라 S_θ 가 최대일 때의 각을 $\theta=\alpha$ 라 할 때 $\tan\alpha$ 의 값을 구하는 것이다. 기하적인 분석을 하여 삼각함수의 정의를 활용하거나 제시문 (가)에 주어진 거리 공식과 미분을 이용하여 구할 수 있다. (1-3)은 선분 AB 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때 극한 $\lim_{\theta\to+0}\frac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$ 의 값을 구하는 것이다. 제시문 (나)에 주어진 삼각함수의 극한 정리를 적용하는 계산 능력이 요구되는 문제이다.

4. 평가 기준

- 회전변환에 의해 주어진 원은 중심이 회전변환만큼 이동하고 반지름이 같은 원으로 변환된다는 사실을 파악하는 능력
- 삼각함수의 정의를 알고 활용할 수 있는 능력
- 삼각함수의 극한을 이용하여 도형으로부터 식을 도출하고 식의 극한을 찾아낼 수 있는 능력
- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) 직선 l 의 y 절편을 k 라 하면, 원과 직선 l : $mx-y+k=0$ 이 접하므로 원의 중심 $(1,0)$ 에서 직선 l 사이의 거리가 반지름 1과 같다. 즉 $\frac{|m+k|}{\sqrt{m^2+1}}=1$이다. 이로부터 $k=-m\pm\sqrt{m^2+1}$ 을 얻는데, $k>0$ 이므로 직선 l 의 y 절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$ 이다.

(별해) 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+1}$ 이다. 이를 x 축으로 1 만큼 평행 이동시키면 [그림 1]에 주어진 직선 l 은

$$y=m(x-1)+\sqrt{m^2+1}$$

이다($\because$ y 절편이 양수이므로). 따라서 직선 l 의 y 절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$ 이다.

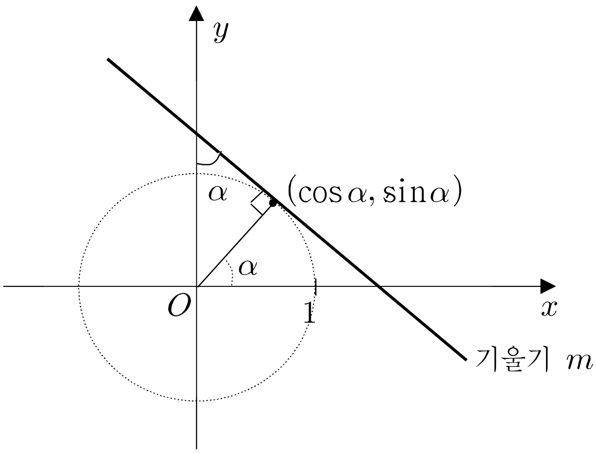
(별해) 직선 l 의 y 절편을 k 라 하면, $y=mx+k$ 를 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하

면 $(1+m^2)x^2+2(mk-1)x+k^2=0$을 얻는다. 판별식

$$D/4=(mk-1)^2-k^2(1+m^2)=-k^2-2mk+1=0$$

으로부터 $k=-m\pm\sqrt{m^2+1}$이고 $k>0$이므로 직선 l의 y절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$이다.

(1-2) (10점) 넓이 S_θ는 선분 AB가 원 O_θ의 중심에 가까워질수록 커진다. 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직인다. 이 점이 선분 AB와 가장 가까울 때는 이 점에서 원 $x^2+y^2=1$의 접선의 기울기가 m일 때이다. 넓이 S_θ가 최대일 때의 θ를 α라 하면, 아래 그림으로부터 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{m}$이다.



(별해) 넓이 S_θ가 최대가 될 필요충분조건은 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$과 직선 $l: mx-y-m+\sqrt{m^2+1}=0$ 사이의 거리가 최소일 때이다. 그 거리를 $h(\theta)$라 하면

$$h(\theta)=\frac{\left|m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}$$

이다($\because$ $m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}$
$=\sqrt{m^2+1}\cos(\theta+\beta)-m+\sqrt{m^2+1}\ \geq\ -m>0$).

$h(\theta)$의 최솟값은 임계점에서 존재하므로 $\dfrac{d}{d\theta}h(\theta)=\dfrac{-m\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{m^2+1}}=0$에서

$\cos\theta=-m\sin\theta$이므로 $\tan\theta=-\dfrac{1}{m}$인 θ에서 넓이 S_θ는 최댓값을 갖는다. 따라서

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{m}$이다.

(1-3) (15점) 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$과 직선 $l\ :mx-y+k=0$ 사이의 거리는 $\theta>0$ 일 때 문제 (1-1)의 풀이에 의해 $\dfrac{|m\cos\theta-\sin\theta+k|}{\sqrt{m^2+1}}$ (여기서 $k=-m+\sqrt{m^2+1}$) 이다. 따라서

$$\left\{\frac{1}{2}f(\theta)\right\}^2=1-\frac{(m\cos\theta-\sin\theta+k)^2}{m^2+1}$$
$$=\frac{(m^2-1)\sin^2\theta+2km(1-\cos\theta)+2m\sin\theta\cos\theta+2k\sin\theta}{m^2+1}$$

이다. 제시문 (나)에 주어진 삼각함수의 극한 정리를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$$
$$=\frac{4}{m^2+1}\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{(m^2-1)\sin^2\theta+2km(1-\cos\theta)+2m\sin\theta\cos\theta+2k\sin\theta}{\theta}\right)$$
$$=\frac{4}{m^2+1}(2m+2k)=\frac{8}{\sqrt{m^2+1}}\quad(\because m+k=\sqrt{m^2+1})$$

[문제 2] (30점)

1. 출제의도

정적분의 성질을 충분히 이해하고 이를 실제 사례에 활용할 수 있는 능력, 극한의 성질(극한의 사칙연산, 연속성 등)을 사용하여 극한값을 정확하게 계산하는 능력을 평가하고자 하였다. 구체적으로는 학생들이 정적분의 값을 계산할 때 피적분함수의 부정적분을 이용하는 방법, 부분적분법을 능숙하게 사용할 수 있는지 평가하고자 하였다. 그리고 문제에서 요구하는 극한값을 계산하기 위해 제시문과 알려진 성질을 활용하는 능력을 측정하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

평면에서 연속함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역을 x축에 수직인 방향으로 잘라서 얻어지는 작은 영역의 넓이가 모두 같을 때 소구간의 길이의 비를 추론하는 문제이다. 영역의 넓이는 정적분을 이용하여 구할 수 있지만, 일반적으로 영역이 단순한 형태가 아닌 경우에는 소구간의 길이를 구체적인 수식으로 나타내기 힘들다. 자르는 회수가 무한히 커질 때 ($n\to\infty$ 일 때) 소구간의 길이는 0으로 수렴하는데, [문제 2]에서는 정적분의 성질을 바탕으로 소구간의 길이를 $n^{-\alpha}$ $(\alpha>0)$과 비교할 것을 요구하였다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 정적분의 기본정리를 서술한다. 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 항상 $f(x)$의 부정적분을 통해 표현될 수 있는데, 이는 정적분의 기본정리에 근거하고 있다. 제시문 (가)는 정적분의 기본정리를 인용하고, 이로부터 얻을 수 있는 추가 정보를 미분계수의 정의를 이용하여 서술하고 있다.

제시문 (나)는 정적분의 기본 성질을 서술한다. 먼저 피적분함수의 차에 관련된 성질을 서술하고, 평면에서 영역의 넓이가 정적분으로 표현될 수 있다는 점을 이용하여 두 개의 피적분함수가 어떤 대소 관계를 만족할 때, 이들의 정적분 값도 같은 대소 관계를 만족함을 간단히 논증하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 『적분과 통계』 교과서, (주)두산동아, 48~50쪽,
『수학II』 교과서, (주)금성출판사, 121쪽~121쪽,
제시문 (나) : 『적분과 통계』 교과서, (주)천재교육, 54쪽~55쪽

3. 논제 해설

조건 (a)와 (b)는 주어진 영역을 작은 영역으로 분할할 때 작은 영역의 넓이가 모두 같을 것을 요구하고 있다. 조건 (b)는 각각의 작은 영역의 넓이가 전체 영역의 넓이의 $1/n$과 같음을 서술하고 있다.

(2-1)은 전체 영역의 넓이를 정적분의 부분적분법을 이용하여 계산할 것을 요구하고 있다. 부분적분법과 지수함수의 부정적분을 잘 알고 있는지 평가하는 문제이다.

(2-2)는 소구간 $[x_{n-1}, x_n]$의 길이는 $n \to \infty$일 때 0으로 수렴하는데, 이 길이가 얼마나 작은 값인지 알아낼 것을 묻고 있다. 구체적으로는 길이를 $1/n$과 비교할 수 있도록 $n(x_n - x_{n-1})$의 극한값을 구할 것을 요구하고 있다. 이를 해결하기 위해 조건 (b)의 양변을 소구간의 길이 $x_n - x_{n-1}$로 나눈다. $n \to \infty$일 때 $x_{n-1} \to x_n = 2$임을 파악하여 제시문 (가)를 적용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(2-3)은 소구간의 길이는 끝점에서 주어진 함수의 값이 0인지 아닌지에 따라 크게 달라진다. $x=2$ 근처와 달리, $x=0$ 근처에서는 근사적으로 $f(x) \approx x$인데, 이것이 소구간 $[0, x_1]$의 길이에 끼치는 영향을 논리적으로 알아낼 것을 요구하고 있다. 이를 위해 힌트를 이용하여

$0 \le x \le x_1$ 일 때 $x \le f(x) \le e^{x_1}x$ 임을 알아내고, 이 부등식과 제시문 (나) 및 조건 (b)를 이용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 부분적분을 이용하고 정확하게 계산하는 능력
- 제시문에서 주어진 정적분의 성질을 적재적소에 활용하는 능력
- 극한의 성질을 이용하여 극한값을 정확하게 계산하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (5점) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2 = e^2+1$

(2-2) (10점) 조건 (b)와 문제 (2-1)에 의해

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{n}(e^2+1)$$

이므로

$$\frac{e^2+1}{n(x_n-x_{n-1})} = \frac{1}{x_n-x_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{x_{n-1}-2}\int_2^{x_{n-1}} f(x)\,dx.$$

이다. 그런데 $n \to \infty$ 일 때 $x_{n-1} \to 2$ 이므로 제시문 (가)에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e^2+1}{n(x_n-x_{n-1})} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n-1}-2}\int_2^{x_{n-1}} f(x)\,dx \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt = f(2)\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n-x_{n-1}) = \frac{e^2+1}{f(2)} = \frac{e^2+1}{2e^2}$$

(2-3) (15점) $0 \le x \le x_1$ 일 때 $1 \le e^x \le e^{x_1}$ 이므로 $x \le f(x) \le e^{x_1}x$ 이다. 제시문 (나)에 의해

$$\frac{x_1^2}{2} = \int_0^{x_1} x\,dx \le \int_0^{x_1} f(x)\,dx \le \int_0^{x_1} e^{x_1}x\,dx = \frac{x_1^2}{2}e^{x_1}$$

이다. 조건 (b)와 문제 (2-1)에 의해 $\frac{x_1^2}{2} \le \frac{e^2+1}{n} \le \frac{x_1^2}{2}e^{x_1}$ 이고, 이를 다시 쓰면

$$\frac{2(e^2+1)}{e^{x_1}} \le n\,x_1^2 \le 2(e^2+1)$$

이다. 그런데 $n \to \infty$ 이면 $x_1 \to 0$ 이고 e^x 는 연속이므로 $\lim_{n\to\infty} e^{x_1} = 1$ 이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} n x_1^2 = 2(e^2+1)$ 이고, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(x_1 - x_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,x_1 = \sqrt{2(e^2+1)}$ 이다.

한편,

$$\frac{n^{\alpha}(x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0} = \frac{n(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{n}\;x_1} \cdot n^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

이므로, 문제 (2-2)에 의해 $\alpha = \frac{1}{2}$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}(x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0}$ 의 값이 양의 실수이다.

따라서 극한값 L 은 $\frac{\sqrt{e^2+1}}{2\sqrt{2}\,e^2}$ 이다.