출제 의도

"여기에서는 홍대입구역이 합정역 보다 가까워." 우리의 일상생활에서 흔히 듣는 대화이다. 평면상의 두 점 A, B가 주어졌을 때, 평면은 A에 더 가까운 점들의 영역과 B에 더 가까운 점들의 영역으로 나누어지고 두 영역의 경계, 즉 A, B로 부터 같은 거리의 점들은 선분 AB의 수직이등분선이다. <문제 3>에서는 먼저 이러한 사항을 이해하는지 묻고, 이를 발전시켜 세 점이 주어졌을 때 평면이 어떤 영역들로 나누어지는지 논리적으로 추론할 수 있는지 평가한다.

3-1. 평면상의 두 점이 주어졌을 때 위와 같은 사실을 수학적으로 설명할 수 있는지 평가한다.

3-2. 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌을 때, A와 가장 가깝고, 그 다음 B, 그 다음으로 C와 가까운 점들의 영역을 생각할 수 있다. 소문항 1에 의하면 이러한 영역들의 경계는 삼각형 ABC의 각 변의 수직이등분선(의 일부)임을 알 수 있다. 문제에서 주어진 (그림 1)의 각 영역이 어떤 것에 해당하는지, 즉 이 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지 논리적으로 추론하고 설명할 수 있는지 평가한다.

소문항 2에서와 같이 세 점이 주어지면 평면을 6개의 영역으로 나눌 수 있다. (그림 2)에서는 세 점을 나타내지 않고 이와 같이 6개의 영역으로 나누어진 상황만을 제시하였다. 이는 그림에 의존하지 않고 논리적인 추론만으로 소문항 (3), (4), (5)에 답할 수 있는지 평가하기 위해서이다.

3-3. 특정한 한 영역, 가령 점 C와 가장 가깝고, 그 다음 B, 그 다음으로 A와 가까운 점들의 영역에 인접한 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지 논리적으로 추론하고 설명할 수 있는지 평가한다.

3-4. 6개의 영역 중 인접한 두 영역이 각각 어떤 영역에 해당하는지 (즉, 이 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지) 주어지면 나머지 영역들이 어떤 것인지가 결정된다. 소문항 3의 결과를 이용하여 이를 설명할 수 있는지 평가한다.

3-5. (그림 2)에서는 나타나있지 않은 세 점 A, B, C의 위치에 따라서 (그림 2)의 여섯 영역이 각각 무엇에 해당하는지는 (즉, 각 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지) 변경된다. 가능한 모든 경우의 수를 소문항 3, 4의 결과를 이용하여 구하고 설명할 수 있는지 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/ 3-1	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
3-2	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
3-3	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - $\boxed{1}$ 경우의 수** ① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (가) 경우의 수** 확통1111. 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
3-4	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - $\boxed{1}$ 경우의 수** ① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (가) 경우의 수** 확통1111. 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
3-5	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td></td><td>할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표
① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표
수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (가) 집합과 명제 - 1 집합
① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.
③ 집합의 연산을 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합
수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다.
수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다.
수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 1 경우의 수
① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (가) 경우의 수
확통1111. 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합
① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합
확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
확통1123-1. 원순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

* 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
** 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학‘ (발간물 등록번호: 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

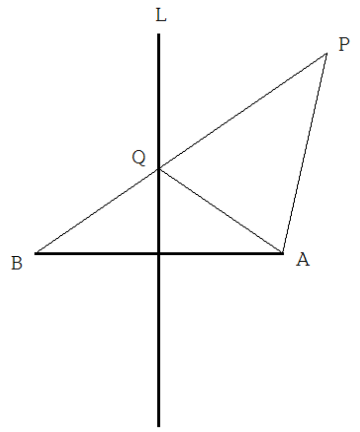
참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	우정호 외	동아출판	2014	147, 222-229
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	136, 202-209
	수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2014	116-117
	수학 II	우정호 외	동아출판	2014	12-28
	수학 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	12-26
	확률과 통계	우정호 외	동아출판	2014	12-18, 26-28, 33-35
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2015	14-18, 24-26, 28-29

문항 해설

평면상의 두 점 A, B가 주어졌을 때, 평면은 A에 더 가까운 점들의 영역과 B에 더 가까운 점들의 영역으로 나누어지고 두 영역의 경계, 즉 A, B로 부터 같은 거리의 점들은 선분 AB의 수직이등분선이다. <문제 3>에서는

먼저 이러한 사항을 이해하는지 묻고, 이를 발전시켜 세 점이 주어졌을 때 평면이 어떤 영역들로 나누어지는지 논리적으로 추론할 수 있는지 평가한다.

3-1. 좌표평면상의 두 점 A, B가 주어졌을 때 A에 더 가까운 점 $P=(x,y)$들의 집합을 구하는 문제이다. 각 점들의 좌표를 이용하여 $\overline{PA}<\overline{PB}$을 식으로 나타내면 일차부등식을 얻는다. 이 일차부등식의 영역은 선분 AB의 수직이등분선을 경계로 A쪽 영역임을 알 수 있다. 또는 아래 그림과 삼각부등식(삼각형의 한 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 합보다 작다.)을 이용하여 설명할 수도 있다. (예시답안 참조)



3-2. 세 수 a, b, c의 크기를 비교하기 위해서는 두 수씩 즉, a와 b, b와 c, a와 c 세 쌍을 비교하면 된다. 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌을 때 다른 점 P에 대해 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$를 비교하려면 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$를 서로 비교하면 된다. 가령 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$의 비교는 소문항 (1)에 의해 P가 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 A쪽에 있으면 $\overline{PA} < \overline{PB}$이고 B쪽에 있으면 $\overline{PB} < \overline{PA}$이다.

<문제 3>의 (그림 1)에서 4번 영역의 점 P는 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 B쪽, 선분 BC의 수직이등분선을 기준으로 C쪽, 선분 AC의 수직이등분선을 기준으로 C쪽에 있으므로 $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$ 이다. 즉, 4번 영역의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PC} < \overline{PB} < \overline{PA}$ 이다.

소문항 2에서와 같이 세 점이 주어지면 평면을 6개의 영역으로 나눌 수 있다. (그림 2)에서는 세 점 A, B, C의 위치를 나타내지 않고 이와 같이 6개의 영역으로 나누어진 상황만을 제시하였다. 이는 그림에 의존하지 않고 논리적인 추론만으로 소문항 3, 4, 5에 답할 수 있는지 평가하기 위해서이다.

3-3. (그림 2)의 직선들은 (그림에는 표시되어 있지 않은) 삼각형 ABC의 변의 수직이등분선들이다. 소문항 2의 논의를 발전시켜 (그림 2)의 인접한 두 영역의 점들에 대해 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$의 대소 관계가 어떻게 변하는지 추론할 수 있다.

(그림 2)의 경계 상에 있지 않은 점 P에 대해 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$를 각각 a, b, c 라 하자. 서로 다른 세 수 a, b, c를

크기순으로 배열하기 위해서 두 수씩 즉, a와 b, b와 c, a와 c 세 쌍의 대소 관계를 비교하면 되는데 가능한 경우는 아래와 같다.

① $a < b,\ b < c,\ a < c\ \ (\Leftrightarrow a < b < c)$

② $b < a,\ b < c,\ a < c\ \ (\Leftrightarrow b < a < c)$

③ $b < a,\ b < c,\ c < a\ \ (\Leftrightarrow b < c < a)$

④ $b < a,\ c < b,\ c < a\ \ (\Leftrightarrow c < b < a)$

⑤ $a < b,\ c < b,\ c < a\ \ (\Leftrightarrow c < a < b)$

⑥ $a < b,\ c < b,\ a < c\ \ (\Leftrightarrow a < c < b)$

위의 ① ~ ⑥ 이 성립하는 점 P들의 집합은 〈문제 3〉의 제시문에서 주어진 기호에 따르면 각각 $U(A,B,C)$, $U(B,A,C)$, $U(B,C,A)$, ... , $U(A,C,B)$에 해당한다.

(그림 2)의 인접한 두 영역 (가령 2번, 3번 영역)의 경계가 선분 AB의 수직이등분선이라면 두 영역에서 a와 b의 대소 관계는 반대가 되고 b와 c, a와 c의 대소 관계는 변화가 없다. 왜냐하면 두 영역은 선분 BC의 수직이등분선과 선분 AC의 수직이등분선에 대해서는 같은 쪽에 있기 때문이다. 따라서 이 경우 2번 영역이 위에서 ④에 해당한다면, 3번 영역은 ⑤이다.

2번 영역이 ④일 때, 2번, 3번 영역의 경계가 선분 AC의 수직이등분일 수는 없다. 이 경우 3번 영역에서는 ④에서 a와 c의 대소 관계만 반대로 바뀐 $b < a,\ c < b,\ a < c$ 이 성립하는데 이는 $a < c < b < a$가 되어 모순이다.

3-4. (그림 2)의 6개의 영역 중 인접한 두 영역이 어떤 영역에 해당하는지 주어지면 나머지 영역들이 어떤 것인지가 결정된다. 소문항 3의 풀이에 따르면 (그림 2)에서 2번 영역이 위 3의 해설에서 ③에 해당한다면 3번 영역은 ② 또는 ④ 이다. 이때 1번 영역이 ②라고 주어졌다면 3번 영역은 ④ 이다. 즉, 인접한 1, 2번 영역이 무엇인지 주어지면 3번 영역이 무엇인지 정하여진다. 이제 2, 3번 영역이 결정되었으므로 4번 영역이 무엇인지 정하여지고 마찬가지로 나머지 영역들도 결정된다.

3-5. (그림 2)와 같이 평면이 나누어지는 어떤 삼각형 ABC에 대해 1번 영역이 위 3에서 ①에 해당한다고 가정하자. 이 삼각형 ABC의 꼭지점의 이름을 BAC로 바꾼다면 1번 영역은 ②에 해당된다. 실재로 ①에서 a, b, c를 b, a, c로 바꾸면 ②를 얻는다. (예시답안 그림 참조) 이와 같이 삼각형 ABC의 꼭지점의 이름을 바꾸는 것으로 1번 영역은 ① ~ ⑥중 어느 것도 될 수 있다.

이제 1번 영역이 ①에 해당한다면 위 (3)의 풀이에 의하면 2번 영역은 ② 또는 ⑥이어야 한다. 각 경우 나머지 영역은 (4)의 풀이에서와 같이 결정된다. (가령 인접한 1, 2번 영역이 각각 ①, ②이라면 3, 4, 5, 6번 영역은 각각 ③, ④, ⑤, ⑥이 된다.)

위의 두 경우를 조합하면 가능한 모든 배열의 개수는 $6 \times 2 = 12$이다. 실재로 이 12가지 배열을 얻기 위해서는 위와 같이 삼각형 ABC의 꼭지점의 이름을 바꾸는 것과 더불어 이 삼각형을 (그림 2)의 세 직선의 교점(즉, 삼각형의 외심)을 중심으로 180되 회전시키는 것이 필요하다. (예시답안 그림과 해설 참조)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	수식전개(수식을 이용하여 설명할 경우) 또는 논리전개(기하학적 방법을 이용할 경우)가 정확함 (2점)	2
3-2	1 ~ 6번 영역이 각각 무엇에 해당하는지 정확히 나타냄 (+2) 4번 영역에 대한 설명이 정확하고 논리적임 (+3)	5
3-3	답이 정확하고 풀이과정이 논리적임 (4점) 답은 정확하나 풀이과정에 대한 논리적인 설명이 부족함 (0~2점)	4
3-4	답이 정확하고 풀이과정이 논리적임 (4점) 답은 정확하나 풀이과정에 대한 논리적인 설명이 부족함 (0~2점)	4
3-5	답이 정확하고 풀이과정이 논리적임 (5점) 답은 정확하나 풀이과정에 대한 논리적인 설명이 부족함 (0~2점)	5

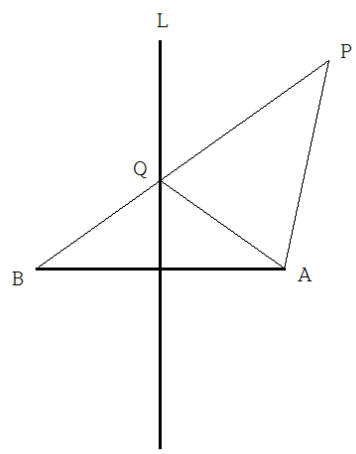
예시 답안

3-1. 주어진 두 점 A, B의 수직이등분선은 y축이다. 좌표평면 상의 점 $P = (x, y)$에 대해

$\overline{PA} < \overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 < \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 < (x+a)^2 + y^2 \Leftrightarrow -4ax < 0 \Leftrightarrow x > 0$

즉, $U(A, B) = \{ (x, y) \mid x > 0 \}$는 y축 오른쪽의 영역이다.

(별해)

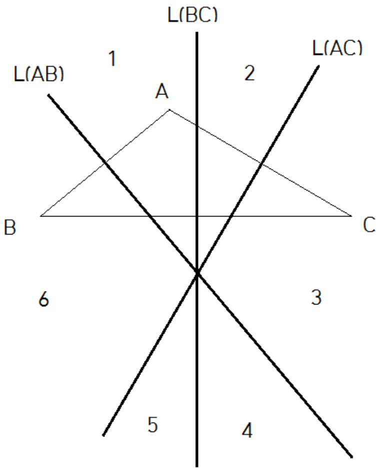


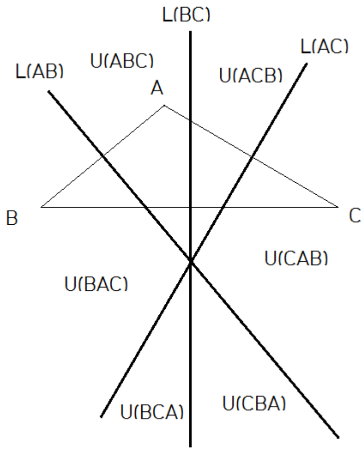
점 P가 선분 AB의 수직이등분선 L에 대해 A쪽에 있다하자. 선분 BP와 직선 L의 교점을 Q라 하면 $\overline{QB}=\overline{QA}$ 이다. 삼각형 PQA의 변의 길이에 대한 삼각부등식으로부터

$\overline{PA} < \overline{PQ}+\overline{QA} = \overline{PQ}+\overline{QB} = \overline{PB}$ 를 얻는다. 마찬가지로 점 P가 L에 대해 B쪽에 있다면

$\overline{PB} < \overline{PA}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $U(A,B)$는 L에 대해 A쪽 영역이다.

3-2.

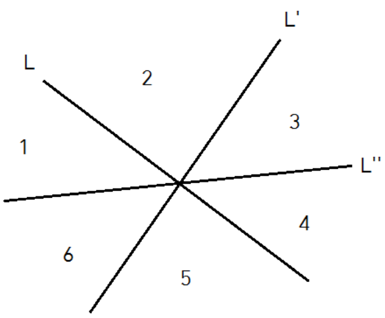




위 왼쪽 그림에서 $L(AB), L(BC), L(AC)$로 표시된 직선은 각각 선분 AB, 선분 BC, 선분 AC의 수직이등분선이다. 그림에서 4번 영역은 $L(AB)$의 B쪽, $L(BC)$의 C쪽이다. 따라서 1에 의해 4번 영역(내부)의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$이다. 즉, 4번 영역은 $U(C,B,A)$이다. 마찬가지로 나머지 영역은 위 오른쪽 그림과 같음을 알 수 있다.

※ 엄밀히 말하면 위의 설명은 4번 영역이 $U(C,B,A)$에 포함됨을 보인 것이다. 평면의 나머지 1 ~ 3, 5, 6번 부분은 각각 다른 영역에 포함되므로 $U(C,B,A)$는 4번 영역으로 한정됨을 알 수 있다.

3-3.



2번 영역이 $U(C,B,A)$라면 2번 영역의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$ 이다.

그림에서 세 직선 L, L', L''은 각각 선분 AB, BC, CA의 수직이등분선 중 하나이다. 2, 3번 영역이 선분 AB의 수직이등분선에 대해 같은 쪽에 있다면 두 영역의 점들에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 대소 관계는 변하지 않고, 2, 3번 영역이 선분 AB의 수직이등분선의 반대쪽에 있다면 두 영역의 점들에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 대소 관계는 반대가 된다. 선분 BC, CA의 수직이등분선들에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

2, 3번 영역은 직선 L'에 대해서는 서로 반대쪽에 있고 나머지 두 직선 L, L''에 대해서는 같은쪽에 있다. 따라서 2번과 인접한 3번 영역에서 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$의 세 쌍의 대소관계 중 1개는 반대가 되고, 2개는 변화가 없어야 한다. 즉 3번 영역은 아래 세 가지 경우 중 하나에 해당한다.

① $\overline{PA} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$

② $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PB} < \overline{PC}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$

③ $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PA} < \overline{PC}$

이 중 ③은 모순되는 식이고 ($\overline{PB} < \overline{PA} < \overline{PC} < \overline{PB}$이므로) ①, ②는 각각 $U(C, A, B)$, $U(B, C, A)$에 해당한다.

3-4. 1, 2번 영역이 각각 $U(B, A, C)$, $U(B, C, A)$이라 하자. 3에서와 같이 영역 $U(B, C, A)$에 인접한 3번 영역은 $U(B, A, C)$, $U(C, B, A)$중 하나이어야 하므로 3번 영역은 $U(C, B, A)$이다.

$U(C, B, A)$와 인접한 영역은 $U(B, C, A)$, $U(C, A, B)$중 하나이므로 4번 영역은 $U(C, A, B)$이고, 마찬가지로 $U(C, A, B)$와 인접한 영역은 $U(C, B, A)$, $U(A, C, B)$중 하나이므로 5번 영역은 $U(A, C, B)$이다.

(별해) 4번 영역은 세 직선 L, L', L'' 각각에 대해 1번 영역과 반대편에 있다. 따라서 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$의 세 쌍의 대소관계가 모두 반대가 되어야 한다. 즉, 4번 영역에서 $\overline{PA} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$ 이므로 4번 영역은 $U(C, A, B)$이다. 마찬가지로 5번 영역은 2번 영역의 "반대편"이므로 $U(A, C, B)$이다.

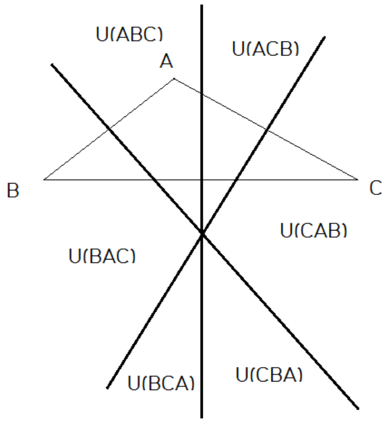
3-5. 1번 영역은 $U(A, B, C), U(A, C, B), \cdots, U(C, B, A)$ 중 어느 것도 될 수 있다. 가령 1번 영역이 $U(A, B, C)$가 되는 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌을 때 두 점 A, B의 위치를 서로 교환하면 1번 영역은 $U(B, A, C)$가 된다. (아래 설명과 그림 참고) 즉, 1번 영역은 하나의 배열로부터 세 점 A, B, C의 위치를 서로 교환함으로써 $U(A, B, C), U(A, C, B), \cdots, U(C, B, A)$중 어느 것도 될 수 있다.

1번 영역이 $U(A, B, C)$가 되는 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌다면 3에서와 같이 2번 영역은 $U(A, C, B)$ 또는 $U(B, A, C)$이다. 1, 2번 영역이 정해지면 4에서와 같이 3 ~ 6번 영역이 모두 결정된다. 따라서 1번 영역이 $U(A, B, C)$인 배열은 최대 2개이다.

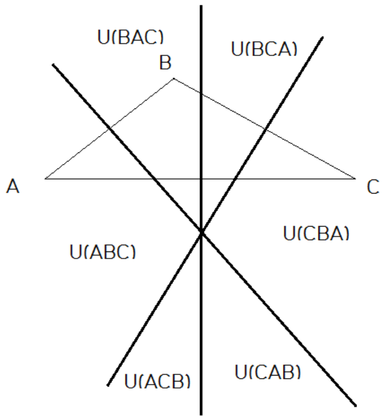
두 배열이 모두 가능함은 다음과 같이 설명할 수 있다. 1번 영역이 $U(A, B, C)$인 배열이 하나는 존재한다. 만약 이 배열에서 2번 영역이 $U(A, C, B)$이라면 세 점 A, B, C에서 A와 C의 위치를 교환하고 세 직선 L, L', L''의 교점 (즉, 삼각형 ABC의 외심)을 중심으로 180도 회전시키면 (즉, 이와 같이 얻은 위치의 세 점 A, B, C에 대해서)

1, 2번 영역은 각각 $U(A,B,C)$, $U(B,A,C)$이다. (아래 설명과 그림 참고) 따라서 가능한 모든 배열의 개수는 $6 \times 2 = 12$ 이다.

※ 특정한 위치의 세 점 A,B,C에 의해 (즉, A,B,C까지 거리의 순서에 의해) (그림2)와 같이 평면이 나누어졌다하자. 세 점 A,B,C의 위치를 서로 교환하면 (또는 세 점의 이름을 바꾸면) 1 ~ 6번 영역이 각각 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 무엇에 해당하는 지가 바뀐다. (또는 1 ~ 6번 영역의 이름이 바뀐다.)
예를 들어 (그림 1)에서 A, B의 위치를 교환하면



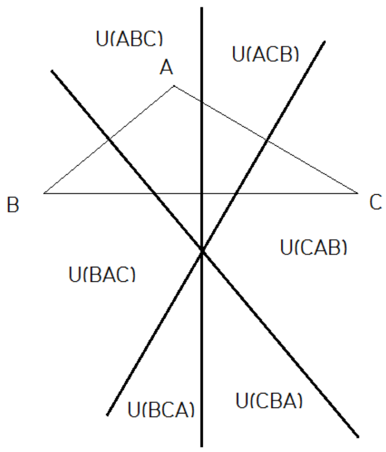
로부터



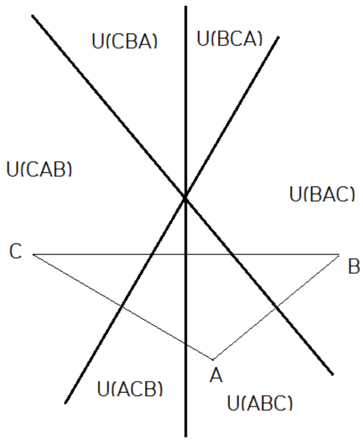
을 얻는다.

이와 같이 세 점 A,B,C의 위치를 교환하여 얻는 경우의 수는 $3! = 6$ 이다. 이제 각각의 경우 세 직선의 교점 (즉, 삼각형 ABC의 외심)을 중심으로 180도 회전하면 새로운 배열을 얻는다.

예를 들어 (그림 1)에서



로부터



를 얻는다.

따라서 1 ~ 6번 영역에 해당하는 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$의 $3! \times 2 = 12$개의 배열을 얻는다.