1. 게임 시작 후 1초 시점에 두더지 로봇이 하나만 나타날 확률 r을 n, p, q를 이용한 식으로 나타내시오.

2. 주어진 n에 대해 문항 (1)의 확률 r이 최대가 되는 p를 n을 이용한 식으로 표시하고, 이 p에 대하여 n이 한없이 커질 때 r의 극한값을 구하시오.

3. $|a| < 1$일 때, 다음 등비급수의 합

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}$$

을 유도하는 과정을 고려하여 아래 급수의 합에 관한 식이 성립함을 보이시오.

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots = \frac{1}{(1-a)^2}$$

4. 게임을 시작 한 후 두더지가 한 마리라도 처음 나타난 시간을 확률변수 T라고 한다. T의 기댓값 $\mathrm{E}(T)$를 구하시오.

출제 의도

학생들에게 익숙한 게임의 예를 들어 확률의 기본 성질을 이해하고, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률과 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 또한 이 과정에서 다항함수의 도함수를 활용하여 최댓값을 구할 수 있는지, 등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

2-1. 게임의 예를 들어 이항분포 확률을 이해하고 구할 수 있는지 평가한다.

2-2. 위 소문항 (1)에서 구한 확률은 n과 p로 주어진다 (이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 n과 p). 다음의 사항들을 평가한다.

- 다항함수의 도함수를 활용하여 p의 함수로서 이 확률의 최댓값을 구할 수 있다.
- n이 증가함에 따라 이 최댓값의 극한을 구할 수 있다.
- e와 연관된 수열의 극한을 구할 수 있다.

2-3. 등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지 묻는다. 다음 소문항 (4)의 기댓값을 구하는데 필요한 급수로서 제시되었다.

※ 문제에서 주어진 급수 $1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$의 수렴성에 대한 설명을 평가하지는 않는다. 문제에서는 급수의 합이 이미 주어졌으므로 급수는 수렴함을 가정한다.

2-4. 다음의 사항들을 평가한다.

- 주어진 확률변수의 확률질량 함수를 구할 수 있다.

- 주어진 확률변수의 기댓값의 식을 구할 수 있다.
- 이 식(급수)의 값을 3의 결과를 활용하여 구할 수 있다.

출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/ 2-1	교육과정*	**[확률과 통계] - (나) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용** ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준**	**[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용** 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (나) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률** ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률** 확통1222-1. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 구별할 수 있다. 확통1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포** ② 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포** 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. 어떤 확률변수가 이항분포를 따르는지 판단하고 이항분포를 따르는 여러 가지 확률변수의 확률, 평균, 표준편차를 구할 수 있다.
2-2	교육과정	**[미적분 I] - (다) 다항함수의 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용** ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분 I] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용** 미적1333. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 다항함수의 극값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한** ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분 I] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한** 미적1112. 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[미적분 II] - (가) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수의 미분** ① 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분 II] - (1) 지수함수와 로그함수 - (나) 지수함수와 로그함수의 미분** 미적2121. 무리수 e의 뜻을 알고, 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
2-3	교육과정	**[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 급수** ② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. ③ 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 I] - (1) 수열의 극한 - (나) 급수** 미적1122. 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. 미적1123. 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
2-4	교육과정	**[확률과 통계] - (나) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용** ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용** 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포** ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포** 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.

* 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
** 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학‘ (발간물 등록번호: 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외	동아출판	2014	107-112, 126-130, 138, 153, 160-162
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2015	89-92, 104, 122-126, 131-134
	미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	39-40, 44-46, 142-154
	미적분 II	우정호 외	동아출판	2014	40-41
	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	34-36, 39-40, 138-147
	미적분 II	류희찬 외	천재교과서	2014	37-38
	수학 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	112
	수학 II	이강섭 외	미래엔	2014	31

문항 해설

학생들에게 익숙한 게임의 예를 들어 확률의 기본 성질을 이해하고, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률과 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 또한 이 과정에서 다항함수의 도함수를 활용하여 최댓값을 구할 수 있는지,

등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 묻는다.

2-1. 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 의하면 각 시점에서 나타나는 두더지의 수는 확률 p인 사건을 n번 독립시행하는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$ 확률변수임을 알 수 있다. 즉, 한 시점에 n개 중 하나만 나타나고 나머지 $n-1$ 개는 나타나지 않을 확률은 $np(1-p)^{n-1}$ 이다.

2-2. 소문항 (1)에서 구한 확률은 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$이다. 여기서 p는 확률이므로 $0 \le p \le 1$ 이다. 다항함수 f의 도함수를 활용하여 이 구간에서 극댓값과 함수의 증감을 파악하고 f의 최댓값을 구할 수 있다. 이와 같이 구한 최댓값 $r_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$은 n이 증가함에 따라 변한다. e와 연관된 수열의 극한 $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 을 고려하여 $\lim\limits_{n \to \infty} r_n$의 극한값을 구할 수 있다.

2-3. $|a| < 1$일 때 등비급수의 합 $R = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$R = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$ 의 양변에 a를 곱하면

$aR = \quad a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots$ 를 얻는다.

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$R - aR = (1-a)R = (1 + a + a^2 + \cdots) - (a + a^2 + a^3 + \cdots) = 1$$

즉, $R = \dfrac{1}{1-a}$ 이다.

이와 유사한 방법으로 급수 $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 의 합을 구할 수 있다.

$S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 의 양변에 a를 곱하면

$aS = \quad a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots$ 를 얻는다.

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$S - aS = (1-a)S = (1 + 2a + 3a^2 + \cdots) - (a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots)$$
$$= 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}$$

즉, $S = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

또는 위의 등비급수와 주어진 급수의 n항까지의 부분합 R_n, S_n에 대해서 위와 같이 논하여서 동일한 결론을 얻을 수 있다.

※ 문제에서 주어진 급수 $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$의 수렴성에 대한 설명을 평가하지는 않는다. 문제에서는 급수의 합이 이미 주어졌으므로 급수는 수렴함을 가정한다.

2-4. 앞면이 나올 확률이 a인 동전을 반복해서 던지는 경우를 생각하자. (단, $0 < a < 1$) k번째 시행에서 앞면이 처음으로 나올 확률은 처음 $k-1$번 계속 뒷면이 나오고 k번째 시행에서 앞면이 나오는 경우의 확률이므로 $(1-a)^{k-1}a$ 이다. 즉, 앞면이 처음으로 나오는 시행회수를 확률변수 X라 하면 $X=k$일 확률이 $(1-a)^{k-1}a$ 이다. 따라서 X의 기댓값은 소문항 (3)의 급수를 이용하여

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{P}(X=k) = a + 2(1-a)a + 3(1-a)^2 a + \cdots = \frac{a}{(1-(1-a))^2} = \frac{1}{a}$$

임을 알 수 있다. <문제 3>에서 주어진 상황도 이와 유사하다. 각 시점에 두더지 로봇이 한 마리도 안 나타날 확률은 $(1-p)^n$ 이고 따라서 한 마리라도 나타날 확률은 $1-(1-p)^n$ 이다. 위의 동전을 반복해서 던지는 시행과 비교하면 두더지가 한 마리라도 처음 나타난 시간 T의 기댓값은

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{1-(1-p)^n}$$

임을 알 수 있다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	풀이과정과 답이 맞음 (3점) 풀이과정은 맞으나 답이 틀림 (+1~2)	3
2-2	도함수를 활용하여 확률이 최대가 되는 p와 최댓값을 구함 (+3) 최댓값의 극한을 정확한 풀이과정과 함께 구함 (+4)	7
2-3	풀이과정과 설명이 정확하고 논리적임 (4점)	4
2-4	게임 시작 후 k초에 처음으로 하나라도 나타날 확률, 즉 $\mathrm{P}(T=k)$를 구함 (+2) 기댓값 $\mathrm{E}(T)$의 식을 구함 (+2) (3)의 결과를 이용하여 $\mathrm{E}(T)$의 값을 구함 (+2)	6

예시 답안

2-1. n개의 두더지 로봇 중 게임시작 후 1초에 특정한 하나(가령, 첫 번째 두더지 로봇)만 나타나고 나머지 $(n-1)$개는 나타나지 않을 확률은 $p(1-p)^{n-1}$이다. 첫 번째 두더지만 나타나는 사건, 두 번째 두더지만 나타나는 사건, ... 은 서로 배반사건이므로 n개 중 하나만 나타날 확률은 각 사건의 확률의 합 즉, $r = np(1-p)^{n-1} = npq^{n-1}$ 이다.
(참고) 특정한 시점에 나타나는 두더지 로봇의 수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 가지는 확률변수이다. 따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X=1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$ 이다.

2-2. 구간 $0 \le p \le 1$에서 함수 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$가 최대가 되는 p의 값과 이때 최댓값을 구하기 위해 구간 $0 < p < 1$에서 함수 f의 증감을 도함수를 이용하여 파악한다. 또는 구간 $0 < p < 1$에서 함수 f의 극값을 구하고 구간의 양끝에서의 함수값 $f(0), f(1)$과 비교하여 최댓값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(p) &= n(1-p)^{n-1} - n(n-1)p(1-p)^{n-2} \\ &= n(1-p)^{n-2}((1-p) - (n-1)p) \\ &= n(1-p)^{n-2}(1-np) \end{aligned}$$

이므로 $p = \dfrac{1}{n}$ 일 때 $f'(p) = 0$이다.

$0 < p < \dfrac{1}{n}$이면 $f'(p) > 0$이어서 f는 이 구간에서 증가하고, $\dfrac{1}{n} < p < 1$이면 $f'(p) < 0$이므로 f는 이 구간에서 감소한다. 따라서 그래프의 개형을 고려하면 함수 f는 구간 $0 \le p \le 1$에서

$p = \dfrac{1}{n}$일 때 최댓값 $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ 을 취한다. $n \to \infty$일 때 이 값의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$

이다.

[별해] 구간 $0 < p < 1$에서 함수 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$의 극값은 $p = \dfrac{1}{n}$일 때 $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$이다. 이 극값은 구간의 양끝에서의 함숫값 $f(0) = 0,\ f(1) = 0$보다 크므로 구간 $0 \le p \le 1$에서 함수의 최댓값이다.

2-3. $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 라고 하면 $aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots$이다.

$S - aS = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \dfrac{1}{(1-a)}$

즉, $(1-a)S = \dfrac{1}{(1-a)}$ 이다. 그러므로 $S = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

[별해] $A = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$라고 하면

$A + aA + a^2A + a^3A + \cdots =$

$(1 + a + a^2 + \cdots) + (a + a^2 + a^3 + \cdots) + (a^2 + a^3 + a^4 + \cdots) + \cdots = 1 + 2a + 3a^2 + \cdots$

즉, $S = A + aA + a^2A + a^3A + \cdots$이다.

그러므로 $S = A(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots) = A^2 = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

2-4. 특정 시점에 n개의 두더지 로봇 중 하나도 나타나지 않을 확률을 s라고 하면 $s = (1-p)^n = q^n$이다. 특정 시점에 적어도 하나의 두더지가 나타날 확률은 여사건의 확률이므로 $1-s$이다. 게임 시작 후 k초에 처음으로 두더지가 하나라도 나타날 확률 즉, $\mathrm{P}(T=k)$은 게임 시작 후 1초, 2초, ... , $k-1$초에는 하나도 나타나지 않고, k초에 적어도

하나가 나타날 확률이므로 $s^{k-1}(1-s)$이다.

확률변수 T의 기댓값은

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}(1-s) = (1-s)\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}$$ 이다.

(3)의 결과에 의해 $\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1} = \dfrac{1}{(1-s)^2}$ 이므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{1-(1-p)^n} = \frac{1}{1-q^n}$$ 이다.

일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	거리, 부등식의 영역, 경우의 수, 순열, 조합
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문항 및 제시문

【문제 3】 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(20점).

> 평면 위의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $\overline{PQ}$로 표시한다. 평면 위에 주어진 두 점 Q_1, Q_2에 대해 $\overline{PQ_1} < \overline{PQ_2}$가 성립하는 점 P들의 집합을 $U(Q_1, Q_2)$로 표시하고, 주어진 세 점 Q_1, Q_2, Q_3에 대해 $\overline{PQ_1} < \overline{PQ_2} < \overline{PQ_3}$가 성립하는 점 P들의 집합을 $U(Q_1, Q_2, Q_3)$로 표시한다.

1. a가 양의 상수이고 좌표평면 위의 두 점 $A(a,0)$, $B(-a,0)$가 주어졌다. $U(A,B)$는 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 A쪽 영역임을 보이시오.

2. (그림 1)과 같이 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A,B,C가 주어졌을 때, 삼각형 ABC의 각 변의 수직이등분선에 의해 평면은 6개의 영역으로 나뉜다. 평면에서 삼각형의 각 변의 수직이등분선을 제외한 부분을 1번 영역 ~ 6번 영역이라고 표시하였다. 각 영역이 $U(A,B,C)$, $U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 어떤 것에 해당되는지 구하고 4번 영역의 답에 대해서는 그