(2)의 결과로부터 $f_1(x+np_1)=f_1(x)$, $f_2(x+mp_2)=f_2(x)$ 이므로, 모든 x에 대해

$g(x+p) = f_1(x+mp_1)+f_2(x+np_2) = f_1(x)+f_2(x) = g(x)$

이 성립하므로 g도 주기함수이다.

1-4. $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$ 가 주기가 p인 주기 함수라고 하면, $f(x)=f(x+p)$의 관계가 모든 실수 x에 대해 성립하여야 한다. 즉 $x=0$일 때 $f(0+p) = f(0)$인 관계가 성립해야 한다.

$f(0) = \cos(0)+\cos(0)=2$이므로 $f(p)=\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 2$이다.

$\cos(x) \le 1$이므로 $\cos(2\pi p) = 1$이고 $\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 1$일 때만

$\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 2$가 성립한다. $\cos(2\pi p) = 1$이므로 p는 정수이고,

$\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 1$이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}}p$도 정수이어야 한다. 주기 p가 양수이므로 적당한 양의 정수 n, m이 있어서 $p = n$, $\frac{1}{\sqrt{2}}p = m$이어야 한다. 즉, $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$이다. $\sqrt{2}$는 무리수이고, 분수 $\frac{n}{m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 미적분 I, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	사건, 독립, 이항분포, 확률변수, 기댓값, $\mathrm{E}(X)$, 극한값, e, 등비급수, 급수의 합
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문항 및 제시문

【문제 2】다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(20점).

> n개의 구멍에 n개의 두더지 로봇이 하나씩 들어 있는 게임기가 있다. 게임 시작 후 1초부터 매 초마다 두더지 로봇이 나타났다가 사라진다. 각 두더지 로봇이 나타날 확률이 p이고 나타나지 않을 확률은 $q=1-p$이다. 각각의 두더지 로봇이 나타나는 사건은 서로 독립이다.

1. 게임 시작 후 1초 시점에 두더지 로봇이 하나만 나타날 확률 r을 n, p, q를 이용한 식으로 나타내시오.

2. 주어진 n에 대해 문항 (1)의 확률 r이 최대가 되는 p를 n을 이용한 식으로 표시하고, 이 p에 대하여 n이 한없이 커질 때 r의 극한값을 구하시오.

3. $|a| < 1$일 때, 다음 등비급수의 합

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}$$

을 유도하는 과정을 고려하여 아래 급수의 합에 관한 식이 성립함을 보이시오.

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots = \frac{1}{(1-a)^2}$$

4. 게임을 시작 한 후 두더지가 한 마리라도 처음 나타난 시간을 확률변수 T라고 한다. T의 기댓값 $\mathrm{E}(T)$를 구하시오.

출제 의도

학생들에게 익숙한 게임의 예를 들어 확률의 기본 성질을 이해하고, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률과 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 또한 이 과정에서 다항함수의 도함수를 활용하여 최댓값을 구할 수 있는지, 등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

2-1. 게임의 예를 들어 이항분포 확률을 이해하고 구할 수 있는지 평가한다.

2-2. 위 소문항 (1)에서 구한 확률은 n과 p로 주어진다 (이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 n과 p). 다음의 사항들을 평가한다.
- 다항함수의 도함수를 활용하여 p의 함수로서 이 확률의 최댓값을 구할 수 있다.
- n이 증가함에 따라 이 최댓값의 극한을 구할 수 있다.
- e와 연관된 수열의 극한을 구할 수 있다.

2-3. 등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지 묻는다. 다음 소문항 (4)의 기댓값을 구하는데 필요한 급수로서 제시되었다.

※ 문제에서 주어진 급수 $1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$의 수렴성에 대한 설명을 평가하지는 않는다. 문제에서는 급수의 합이 이미 주어졌으므로 급수는 수렴함을 가정한다.

2-4. 다음의 사항들을 평가한다.
- 주어진 확률변수의 확률질량 함수를 구할 수 있다.