출제 의도

우리 주위의 자연적, 인공적 대상과 현상들은 공간적, 시간적으로 동일하게 반복되는 패턴을 보이는 경우가 많다. 수학적으로 이러한 대상과 현상을 기술하고자 할 때 주기함수를 얻게 되며, 주기함수들로 이루어진 함수들, 가령 주기함수들의 합, 곱을 다루게 된다. <문제 1>에서는 주기와 주기함수의 정의를 정확히 이해하는지 먼저 묻고, 주기함수의 성질과 주기가 다른 두 함수의 합이 언제 주기함수가 되는지 묻는다.

1-1. 제시문에서 주어진 주기함수의 정의를 정확히 이해하는지 묻는다. 코사인함수는 실수전체에서 정의된 주기 2π인 함수이지만, 정수의 집합을 정의역으로 가지는 함수로서는 주기함수가 아님을 이해하고 설명할 수 있는지 평가한다. 코사인함수의 성질(특히 함숫값이 1이 되는 점들)과 원주율 π가 무리수이고 무리수와 유리수의 차이를 이해하는지 묻는다.

1-2. 주기가 p인 주기함수는 동일한 함숫값이 p마다 반복되는 함수이다. 따라서 동일한 함숫값이 $2p, 3p,$ ... 마다 반복된다고 볼 수 있다. 이러한 주기함수의 성질을 파악하고 수학적 귀납법 등을 이용하여 설명할 수 있는지 평가한다. 다음 소문항 (3)의 힌트로서 제시되었다.

1-3. 주기가 다른 여러 현상(또는 함수)을 동시에 고려할 때 하나의 새로운 주기를 이루는 경우가 있다. 가령 2년, 3년마다 열리는 두 행사가 있다면, 두 행사는 6년마다 같은 해에 열린다. 두 주기함수에 대해 주기의 비가 유리수라는 조건으로부터 이와 유사한, 즉 두 함수의 합이 주기함수라는 결론을 이끌어 낼 수 있는지 묻는다.

1-4. 두 주기함수의 주기의 비가 무리수일 경우, 위 소문항 (3)의 풀이과정에 비추어보면 두 함수의 합은 주기함수가 아님을 짐작할 수 있다. 특별히 두 코사인함수의 합에 대해서 코사인함수의 성질 (코사인함수의 주기, 최댓값 등)을 이용하여 이를 설명할 수 있는지 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/ 1-1	교육과정*	**[미적분 II] - (나) 삼각함수 - ① 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준· 성취수준**	**[미적분 II] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의

문항 및 제시문		관련 성취기준
		그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
1-2	교육과정	**[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
	교육과정	**[수학 Ⅱ] - (다) 수열 - 3 수학적 귀납법** ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 Ⅱ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법** 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
1-3	교육과정	**[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
1-4	교육과정	**[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.

* 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"
** 교육과학기술부 발간 "2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학' (발간물 등록번호: 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2014	76-78, 84, 85
	미적분 Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2014	69-73
	수학 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2014	179-182
	수학 Ⅱ	황선욱 외	좋은책신사고	2014	132-134

문항 해설

<문제 1>에서는 주기와 주기함수의 정의를 정확히 이해하는지 먼저 묻고, 주기함수의 성질과 주기가 다른 두 함수의 합이 언제 주기함수가 되는지 묻는다.

1-1. 제시문에서 주기함수와 주기의 정의가 주어졌다. 이 정의에 따르면 정수의 집합을 정의역으로 가지는 함수가 주기함수라면 주기는 양의 정수가 되어야한다. 코사인함수는 실수전체에서 정의된 주기 2π인 함수이지만, 정수의 집합을 정의역으로 가지는 함수로서는 주기함수가 아니다. 즉 모든 정수 k에 대해 $\cos(k+n)=\cos(k)$가 성립하는 양의 정수 n은 존재하지 않는다. 이는 양변에 $k=0$을 대입하여 보일 수 있다. ($\cos x = 1$이면 x는 2π의 정수배이고 π는 무리수이다.)

1-2. 주기가 p인 주기함수는 동일한 함숫값이 p마다 반복되는 함수이다. 따라서 동일한 함숫값이 $2p, 3p,$ ... 마다 반복된다고 볼 수 있다. 가령, 모든 x에 대해 $f(x+p)=f(x)$ 가 성립하므로 특히 양변에 x대신 $x+p$를 대입하면 $f(x+2p)=f(x+p)=f(x)$를 얻을 수 있다. 이와 유사한 논의와 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 양의 정수 n에 대해 $f(x+np)=f(x)$이 성립함을 보일 수 있다.

1-3. 주기가 다른 여러 현상(또는 함수)을 동시에 고려할 때 하나의 새로운 주기를 이루는 경우가 있다. 가령 2년, 3년마다 열리는 두 행사가 있다면, 두 행사는 6년마다 같은 해에 열린다. 이는 6년이라는 큰 주기 안에서 2년, 3년의 소주기가 각각 3번, 2번 반복되기 때문이다. 즉, 6년 = 2년 × 3 = 3년 × 2 로부터 6년의 주기를 얻을 수 있다. 마찬가지로 만약 두 주기함수의 주기의 비 $p_1/p_2 = n/m$가 유리수라면 $p_1 m = p_2 n$ 이므로 두 주기함수 각각 따라서 그 합도 $p_1 m = p_2 n$ 마다 동일한 함숫값이 반복되는 주기함수이다.

1-4. 두 주기함수의 주기의 비가 무리수일 경우, 소문항 (3)의 풀이과정에 비추어보면 두 함수의 합은 주기함수가 아님을 짐작할 수 있다. 소문항 (4)에서는 특별히 두 코사인 함수의 합에 대해서 이를 설명할 수 있는지 묻는다. (참고: 이를 일반적인 두 주기함수의 합에 대해 설명하는 데에는 어려움이 따르는데, 이는 두 함수의 합을 고려하는 것과 두 함수를 각각 고려하는 것이 다르기 때문이다.) (4)에서 주어진 함수 $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi x)$의 경우 $f(x)=2$인 경우는 두 코사인 함수가 각각 1인 경우뿐이다. 두 코사인함수가 동시에 1이 되는 점은 $x=0$뿐임을 볼 수 있다. 따라서 함수값 $f(0)=2$는 주기적으로 반복되지 않으므로 f는 주기함수가 아니다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	문제와 같은 양의 정수 n이 존재한다면 n은 2π의 정수배임을 논리적으로 설명 (+3) 이는 π가 무리수라는 사실에 모순됨을 설명 (+1)	4

1-2	수학적 귀납법 등을 사용하여 모든 양의 정수 n에 대해 주어진 식이 성립함을 논리적으로 설명 (4점)	4
1-3	주기의 비가 유리수라는 조건으로부터 $p_1 m = p_2 n$ 인 양의 정수 m, n이 존재함을 설명 (+3) (2)의 결과를 이용하여 두 함수의 합이 주기함수임을 설명 (+3)	6
1-4	코사인함수의 성질을 이용하여 주어진 함수가 주기함수가 아님을 논리적으로 설명 (6점)	6

예시 답안

1-1. 모든 정수 k에 대해 $\cos(k+n) = \cos(k)$가 성립하는 양의 정수 n이 있다고 가정하자.

$k=0$일 때 $\cos(0+n) = \cos(0)$이고, $\cos(n) = \cos(0) = 1$ 이므로 n은 2π의 정수배이다.

즉 $n = m2\pi$인 정수 m이 존재한다. $n \neq 0$ 이므로 $m \neq 0$ 이다.

따라서 $\pi = \dfrac{n}{2m}$인데, π는 무리수이고, 분수 $\dfrac{n}{2m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

[별해] 삼각함수의 덧셈공식 $\cos(k+n) = \cos k \cos n - \sin k \sin n$ 을 이용하면

$\cos k \cos n - \sin k \sin n = \cos k$ 이다. $\sin k = 0$와 $\cos k = 0$이 동시에 성립하지는 않으므로

$\cos k \neq 0$일 때 양변을 $\cos k$로 나누고 정리하면 $\cos n - 1 = \tan k \sin n$이다.

이것이 모든 정수 k에 대해 성립하는데 좌변은 k와 무관하므로 $\cos n - 1 = 0$이고 $\sin n = 0$ 이어야 한다.

그러므로 $n = m2\pi$인 정수 m이 존재한다. $n \neq 0$ 이므로 $m \neq 0$ 이다.

따라서 $\pi = \dfrac{n}{2m}$인데, π는 무리수이고, 분수 $\dfrac{n}{2m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

1-2. 수학적 귀납법을 이용하여 모든 양의 정수 n에 대해 $f(x+np) = f(x)$가 성립함을 보이자.

$n=1$일 때 p가 주기이므로 주기함수의 정의에 의해 $f(x+p) = f(x)$이다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하면 모든 x에 대해 $f(x+kp) = f(x)$이다. 따라서

$f(x+(k+1)p) = f((x+kp)+p) = f(x+kp) = f(x)$이다. 즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대해 $f(x+np) = f(x)$가 성립한다.

1-3. 가정에 의해 $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n}{m}$인 정수 n, m이 있다.

함수의 주기 p_1, p_2는 양수이므로 $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n}{m}$는 양수이고 따라서 n, m도 양수라 가정할 수 있다.

$\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n}{m}$로부터 $mp_1 = np_2$이다. 이 값을 p라 하면 p는 양수이다.

(2)의 결과로부터 $f_1(x+np_1)=f_1(x)$, $f_2(x+mp_2)=f_2(x)$ 이므로, 모든 x에 대해

$g(x+p)=f_1(x+mp_1)+f_2(x+np_2)=f_1(x)+f_2(x)=g(x)$

이 성립하므로 g도 주기함수이다.

1-4. $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$ 가 주기가 p인 주기 함수라고 하면, $f(x)=f(x+p)$의 관계가 모든 실수 x에 대해 성립하여야 한다. 즉 $x=0$일 때 $f(0+p)=f(0)$인 관계가 성립해야 한다.

$f(0)=\cos(0)+\cos(0)=2$이므로 $f(p)=\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=2$이다.

$\cos(x)\le 1$이므로 $\cos(2\pi p)=1$이고 $\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=1$일 때만

$\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=2$가 성립한다. $\cos(2\pi p)=1$이므로 p는 정수이고,

$\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=1$이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}}p$도 정수이어야 한다. 주기 p가 양수이므로 적당한 양의 정수 n, m이 있어서 $p=n$, $\frac{1}{\sqrt{2}}p=m$이어야 한다. 즉, $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$이다. $\sqrt{2}$는 무리수이고, 분수 $\frac{n}{m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 미적분 I, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	사건, 독립, 이항분포, 확률변수, 기댓값, $\mathrm{E}(X)$, 극한값, e, 등비급수, 급수의 합
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문항 및 제시문

【문제 2】다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(20점).

n개의 구멍에 n개의 두더지 로봇이 하나씩 들어 있는 게임기가 있다. 게임 시작 후 1초부터 매 초마다 두더지 로봇이 나타났다가 사라진다. 각 두더지 로봇이 나타날 확률이 p이고 나타나지 않을 확률은 $q=1-p$이다. 각각의 두더지 로봇이 나타나는 사건은 서로 독립이다.