한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(2)-1번

1.

1인용 배를 선택할 확률 = 4개의 동전을 던져 같은 면이 4개일 확률 = $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

2인용 배를 선택할 확률 = 4개의 동전을 던져 같은 면이 2개일 확률 = $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

3인용 배를 선택할 확률 = 나머지 확률 = $1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$

2. 우선 2인용 배만 무인도 A로 돌아오는 경우는 아래의 두 가지 사건 중 하나가 일어난 경우이다.

(1) 사건 X: 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 1인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

(2) 사건 Y: 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

사건 X가 일어나면 무인도 B에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 남게 된다. 사건 Y가 일어나면 무인도 A에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 있게 된다. 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로, '2인용 배가 무인도 A로 돌아왔을 때 남은 한 명이 무인도 B에 남을 확률'은

$\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X\cup Y)}=\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)}=\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)}$ 이다. 구체적인 계산은 아래와 같다.

- $\mathrm{P}(X)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)\times\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)$
- $\mathrm{P}(Y)=\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$

따라서 구하고자 하는 확률 $\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)}$은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)\times\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)}{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)\times\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)+\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)}{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)+1}=\frac{3}{3+8}=\frac{3}{11}$$

이고, $p=3, q=11, p+q=14$ 이다.

3. 무인도 A를 3명이 출발하는 경우는 아래의 3가지 경우 중 하나이다.

(1) 1인용 배 3척: 선택될 확률 = $\left(\frac{1}{8}\right)^3$

(2) 1인용 배 1척과 2인용 배 1척: 선택될 확률 = ${}_3C_1\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2$

(3) 3인용 배 1척: 선택될 확률 = $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

각각의 경우 3명이 모두 무인도 B에 남는 경우는 아래와 같다.

(1) 무인도 B에 있는 배는 1인용 배 3척이므로

1인용 배를 선택하는 사람이 없는 경우:

일어날 확률 $(1-\frac{1}{8})^3$

(2) 무인도 B에 있는 배는 1인용 배 1척과 2인용 배 1척이므로

(i) 3명이 모두 3인용 배를 선택하거나

(ii) 2명이 3인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배를 선택하는 경우:

일어날 확률 = $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

(3) 무인도 B에 있는 배는 3인용 배 1척이므로

3명이 동시에 3인용 배를 선택하는 경우만 제외:

일어날 확률 = $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$

따라서, 구하고자 하는 확률은 아래와 같이 확률의 곱의 합으로 구할 수 있다.

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{7^3+3^3 2^6+3^5 2^4+7 \cdot 2^{12}}{8^6}$$

분자는 홀수+짝수+짝수+짝수로 홀수이다. 따라서 기약분수이며 분자를 16으로 나눈 나머지는 7^3을 16으로 나눈 나머지와 동일하고 그 값은 7이다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)

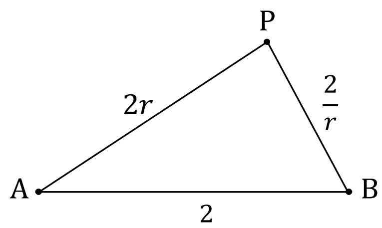
[문제 2]

1. $\overline{\mathrm{AP}}=2r,\ \overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{2}{r}$ 라 하자($r>0$). 세 점 A, B, P는 삼각형의 세 꼭짓점이거나, 일직선 위에 있으므로

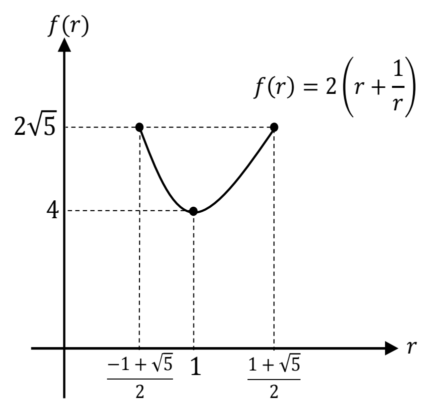
$2r+\dfrac{2}{r}\ \geq 2,\quad 2r+2\ \geq\ \dfrac{2}{r},\quad 2+\dfrac{2}{r}\ \geq 2r$ 이 성립한다. 이로부터 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \leq r \leq\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이 성립한다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\left(r+\dfrac{1}{r}\right)=f(r)$ 이라 하면, $f'(r)=2\left(1-\dfrac{1}{r^2}\right)$ 이므로 다음의 변화표와 $f(r)$의 그래프로부터

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최댓값은 $f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2\sqrt{5}$ 이고, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $f(1)=4$ 이다.



r	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$2\sqrt{5}$	↘	4	↗	$2\sqrt{5}$



(참고: $\overline{\mathrm{AP}}=r,\ \overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{4}{r}$ 라 두면 ($r>0$), $-1+\sqrt{5}\ \leq r \leq\ 1+\sqrt{5}$ 이 성립한다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=r+\dfrac{4}{r}=g(r)$라 하면 역시 동일한 결과를 얻을 수 있다.)

2. $f'(x)=\sqrt{4+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}+a\cdot\dfrac{\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)'}{x+\sqrt{4+x^2}}\ =\sqrt{4+x^2}+\dfrac{x^2+a}{\sqrt{4+x^2}}=\dfrac{2x^2+a+4}{\sqrt{4+x^2}}$ 이고, 한편

$f'(x)=b\sqrt{4+x^2}=\dfrac{bx^2+4b}{\sqrt{4+x^2}}$ 이다. $2x^2+a+4=bx^2+4b$ 로부터 $b=2,\ a=4$ 이고 따라서 $a+b=6$ 이다.

3. 선분 AB가 놓여있는 평면을 $xy-$평면이라 하고, $\mathrm{A}(-1,0),\ \mathrm{B}(1,0),\ \mathrm{P}(x,y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$ 이다. 양변을 제곱해서 y^2에 대해

정리하면, $y^2=2\sqrt{x^2+4}-1-x^2$ 이고, $\mathrm{P}(x,y)$는 이 방정식을 만족시킨다.

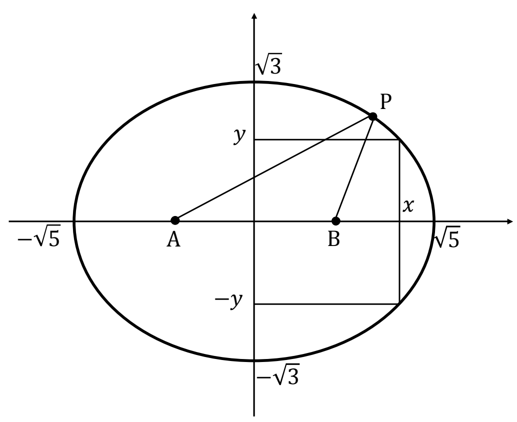
방정식으로부터 점 P들이 이루는 곡선은 x축 및 y축에 대칭이고,

x축 및 y축과는 각각 $(\pm\sqrt{5},\ 0)$, $(0,\ \pm\sqrt{3})$에서 만난다.

$y^2=h(x)$라 하면, 점 P들이 이루는 곡선은 함수 $y=\sqrt{h(x)}$ 및 $y=-\sqrt{h(x)}$

의 그래프로 이루어져 있고, x의 범위는 $-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}$ 임을 알 수 있다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는 (문제 2의 결과를 이용해서)



$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left(\sqrt{h(x)}-\left(-\sqrt{h(x)}\right)\right)^2dx=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(y-(-y))^2\,dx=2\int_0^{\sqrt{5}}4y^2\,dx$$

$$=8\int_0^{\sqrt{5}}\left(2\sqrt{x^2+4}-1-x^2\right)dx$$

$$=8\left(x\sqrt{4+x^2}+4\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)-x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\sqrt{5}}$$

$$=8\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+4\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\frac{8}{3}\sqrt{5}+32\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

이다.