한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-1번

[문제 1번]

1.

숫자 3이 나오는 횟수가 2의 배수일 확률 $= {}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + {}_nC_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} + \cdots \qquad -(\bigstar)$

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^n = {}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \cdots$$

$$+ \quad \left(\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{6}\right)^n = {}_nC_0\left(-\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_nC_1\left(-\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \cdots$$

$$= 2\times\bigstar$$

$$\therefore \bigstar = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

㈜ 0을 2의 배수로 생각하지 않는 학생이 있을 수 있다. 이 경우 답은, ★에서 0회일 확률을 제하여,

$$\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2.

기댓값 $= \sum_{k=3}^{n} 100\times k(k-1)(k-2)\times {}_nC_k \times\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{100}{6^n}\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\times {}_nC_k\times 5^{n-k}$

$$k(k-1)(k-2)\times {}_nC_k = k(k-1)(k-2)\times\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-3)!}{(k-3)!((n-3)-(k-3))!}\times n(n-1)(n-2)$$

$\therefore$ 기댓값 $= \frac{100\times n(n-1)(n-2)}{6^n}\sum_{k=3}^{n} {}_{n-3}C_{k-3}\times 5^{n-k} = \frac{100\times n(n-1)(n-2)}{6^n}\sum_{k=0}^{n-3} {}_{n-3}C_k\times 5^{n-(k+3)}$ ....$\left(5^{n-(k+3)} = 5^{(n-3)-k}\right)$

$= \frac{100\times n(n-1)(n-2)}{6^n}(1+5)^{n-3} = \frac{100\times n(n-1)(n-2)}{6^3} = \frac{25}{54}n(n-1)(n-2)$ (원)

3.

A가 받을 금액의 기댓값 $= 3\times 0\times {}_nC_0\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + 3\times 2\times {}_nC_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \cdots$

−) B가 받을 금액의 기댓값 $= 3\times 1\times {}_nC_1\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + 3\times 3\times {}_nC_3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \cdots$

$= \sum_{k=0}^{n} 3k\times {}_nC_k\times\left(-\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{3}{6^n}\sum_{k=0}^{n} k\times {}_nC_k\times(-1)^k(5)^{n-k} = \frac{3}{6^n}\sum_{k=1}^{n} k\times {}_nC_k\times(-1)^k(5)^{n-k}$, $(k\times {}_nC_k = n\times {}_{n-1}C_{k-1}$이므로)

$= \frac{3n}{6^n}\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\times(-1)^k\times 5^{n-k} = \frac{3n}{6^n}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\times(-1)^{k+1}\times 5^{(n-1)-k} = \frac{-3n}{6^n}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\times(-1)^k\times 5^{(n-1)-k}$

$= \frac{-3n}{6^n}(-1+5)^{n-1} = \frac{-3n}{6^n}4^{n-1} = \frac{-n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

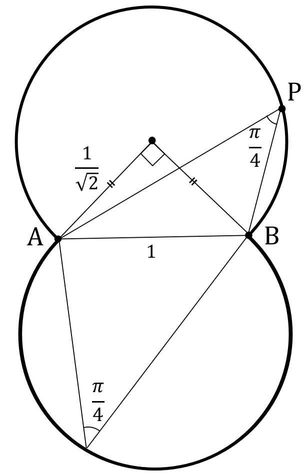
$\therefore$ B쪽이 더 크다. 차이 $= \frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (원)

자 연 계	한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

[문제 2번]

1. 평면 α위에서 $\angle APB = \frac{\pi}{4}$를 만족하는 점 P는 선분 AB가 현이 되는 평면 α위의 두 개의 원 위에 있고, 각각의 원에서 현 AB의 중심각은 $\frac{\pi}{2}$이고, 점 P는 원주각 $\angle APB = \frac{\pi}{4}$인 점이다. 오른쪽 그림에서 구하는 영역의 넓이는

$$2\left(\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$$ 이다.

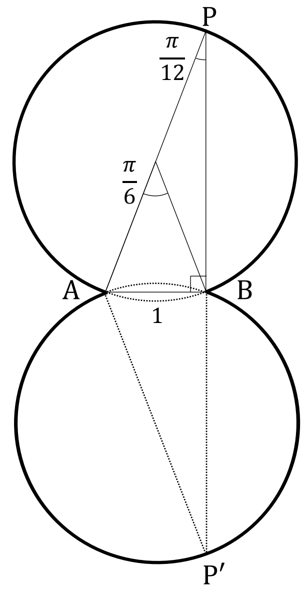


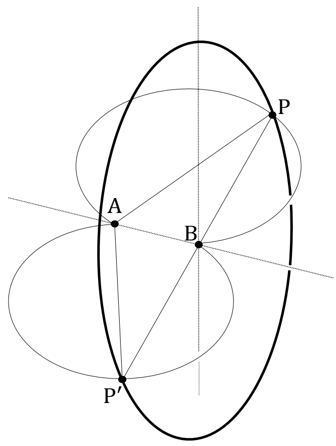
2. 먼저 점 A와 B를 포함하는 한 평면 α위에 있고, $\angle APB = \frac{\pi}{12}$인 점 P는 물음 1에서와 마찬가지로 선분 AB가 현이 되는 평면 α위의 두 개의 원 위에 있고, 각각의 원에서 현 AB의 중심각은 $\frac{\pi}{6}$이고, 점 P는 원주각 $\angle APB = \frac{\pi}{12}$인 점이다.

평면 α위에서 $\overline{AP}$가 최대인 점 P는 A와 각각의 원의 중심을 지나는 직선 위에 있다. (오른쪽 그림에서 P와 P′)

한편, 점 A, B를 포함하는 임의의 다른 평면에서도 점 P들이 이루는 곡선은 평면 α에서의 곡선과 동일한 모양을 가진다.

따라서 각각의 평면에서 $\overline{AP}$의 최댓값은 동일하며 그 값은 평면 위의 (두) 원의 지름인 $2\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ 이다.





또한 위의 관찰로부터 공간에서 $\overline{AP}$를 최대로 하는 점 P들이 이루는 곡선은 위 그림에서와 같이 중심이 B, 반지름이 $\overline{BP}$인 원이다. (이 원을 포함하는 평면은 점 A, B를 지나는 직선에 수직이다.)

따라서 구하는 곡선의 길이의 제곱은 $l^2 = (2\pi\overline{BP})^2 = 4\pi^2\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 1^2\right) = 4\pi^2(7+2\sqrt{12}) = (28+16\sqrt{3})\pi^2$ 이다.

3. 물음 2에서와 마찬가지로 점 A와 B를 포함하는 한 평면 α위에 있고 $\angle APB = \theta$인 점 P는, 선분 AB가 현이 되는 평면 α위의 두 개의 원 위에 있고, 각각의 원에서 현 AB의 중심각은 2θ이고, 점 P는 원주각 $\angle APB = \theta$인 점이다.

또한 공간에서 점 P들이 이루는 도형은 평면 α에 있는 점 P들이 이루는 곡선을 점 A, B를 지나는 직선을 중심으로 회전시켜 얻은 곡면이다.

따라서 이 도형의 평면 α위로의 정사영의 넓이는

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때, (직사각형의 넓이) + 2(반원의 넓이)

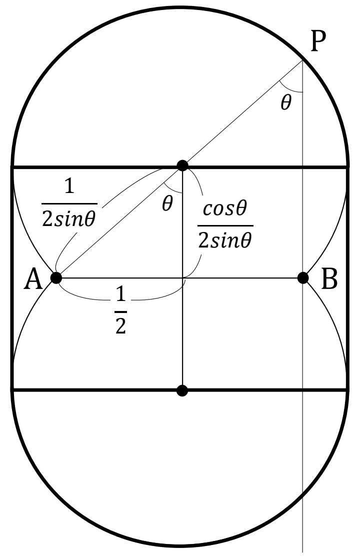
$$= 2\cdot\frac{1}{2\sin\theta}\cdot 2\cdot\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} + 2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2\sin\theta}\right)^2 = \frac{4\cos\theta+\pi}{4\sin^2\theta}$$ 이고,

(2) $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$일 때, $2\cdot$(각각의 원이 현 AB로 잘린 부분의 넓이)

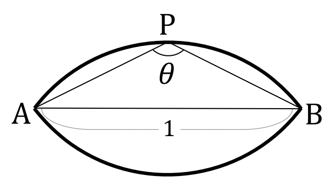
$= 2\cdot\{$(AB를 현으로 하는 부채꼴이 넓이)

$\quad -$(점 A, B와 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이)$\}$

$$= 2\cdot\left(\frac{\pi-\theta}{4\sin^2\theta} - \left(-\frac{\cos\theta}{4\sin\theta}\right)\right) = \frac{\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta}{2\sin^2\theta}$$ 이다.



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$