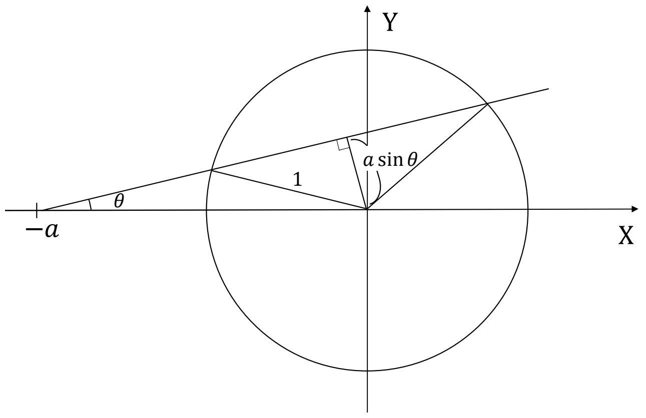
한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | **오전-1번**

[문제 1]

S의 중심점을 $(0,0,0)$이라 하고, L을 $L: x=-a, y=0$인 직선으로 두면 C_θ의 중심점은 $\mathrm{XY}-$ 평면위에 있다.



$t=\tan\theta$라 하면

$$\begin{cases} y=t(x+a) & -\star \\ x^2+y^2=1 & -\star\star \end{cases}$$

$x^2+t^2(x+a)^2=1 \qquad (t^2+1)x^2+2at^2x+(t^2a^2-1)=0$

직선 ★, 원 ★★의 교점의 X 좌표를 α_1, α_2라 하면,

$\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{2at^2}{t^2+1} \qquad \alpha_1\alpha_2=\dfrac{t^2a^2-1}{t^2+1}$

중심점의 X 좌표 $=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=-\dfrac{at^2}{t^2+1} \qquad$ Y 좌표 $=t\left(-\dfrac{at^2}{t^2+1}+a\right)=\dfrac{at}{t^2+1}$

위 그림에서 보면, $(\text{반지름})^2=1^2-(a\sin\theta)^2$

1. 넓이$=\pi(1-\mathrm{a}^2\sin^2\theta)$. $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 이면, 원의 면적= $\pi(1-\dfrac{a^2}{4})$.

2. $dt=\sec^2\theta\, d\theta$, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이므로

주어진 식은 $\pi\displaystyle\int_0^{\theta_0}(1-\mathrm{a}^2\sin^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta=\pi\int_0^{\theta_0}\sec^2\theta-a^2\tan^2\theta\, \mathrm{d}\theta=\pi\int_0^{\theta_0}(1-a^2)\sec^2\theta+a^2 d\theta=\pi((1-a^2)\tan\theta_0+a^2\theta_0)$

$\tan\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{a}^2-1}}$ 이므로, 적분값은 $\pi\dfrac{\theta_0\tan^2\theta_0-\tan\theta_0+\theta_0}{\tan^2\theta_0}$

3.

$$\begin{cases} x(\theta)=-\dfrac{a\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=-\dfrac{a\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=-a\sin^2\theta \\ \\ y(\theta)=\dfrac{a\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=a\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$x'(\theta)=-2a\sin\theta\cos\theta$

$y'(\theta)=a\cos^2\theta-a\sin^2\theta$

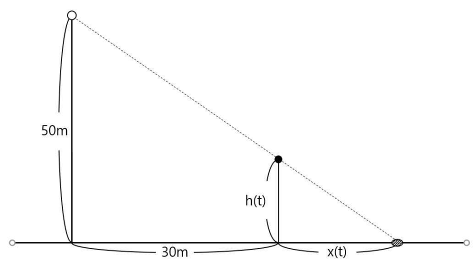
$\{x'(\theta)\}^2+\{y'(\theta)\}^2=4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=a^2$

곡선의 길이$=\displaystyle\int_0^{\theta_0}a\, d\theta=a\theta_0$

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1.



수직으로 던진 공의 t초 후의 공의 높이를 $h(t)$라 하면 제시문에 의해 $h(t)=20t-5t^2$, $h'(t)=20-10t$이다.

$h(t)=-5(t-2)^2+20<50$이므로 항상 그림자가 생긴다.

삼각형의 닮음을 이용하면 $\dfrac{h(t)}{x(t)}=\dfrac{50}{x(t)+30}$이고

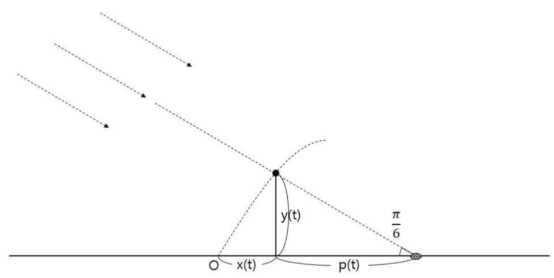
$h(t)(x(t)+30)=50x(t)$ 이므로 $x(t)=\dfrac{30h(t)}{50-h(t)}$이다.

그림자의 속도는 $x'(t)=\dfrac{30h'(t)(50-h(t))+30h(t)h'(t)}{(50-h(t))^2}=\dfrac{1500h'(t)}{(50-h(t))^2}$ 이다.

$h(3)=15$, $h'(3)=-10$이므로 $x'(3)=\dfrac{30\times50\times(-10)}{35^2}=-\dfrac{600}{49}$ 이다.

따라서 그림자는 가로등을 향해 $\dfrac{600}{49}\,\mathrm{m/s}$의 속력을 가진다.

2.



제시문에 의해 t초 후 공의 위치는 $(x(t), y(t))=(10t, 10\sqrt{3}\,t-5t^2)$이다.

그림자의 위치를 $z(t)$라고 하면 $z(t)=x(t)+p(t)$인데, $\dfrac{y(t)}{p(t)}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $z(t)=x(t)+\sqrt{3}\,y(t)$이다.

그림자의 속도는 $z'(t)=x'(t)+\sqrt{3}\,y'(t)=10+\sqrt{3}\,(10\sqrt{3}-10t)=40-10\sqrt{3}\,t$이다.

그림자의 속력이 10이 되기 위해서는

$|z'(t)|=|40-10\sqrt{3}\,t|=10$ 이므로, $40-10\sqrt{3}\,t=10$ 또는 $40-10\sqrt{3}\,t=-10$,

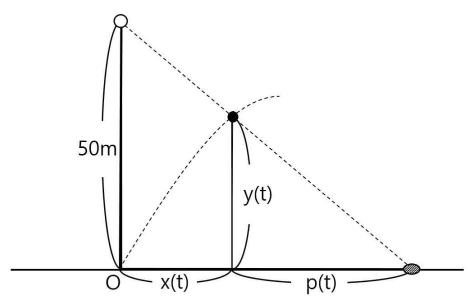
즉, $t=\sqrt{3}$ 또는 $t=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$일 때 그림자의 속력이 10이 된다.

이때, 높이를 구하면

$y(\sqrt{3})=10\sqrt{3}\times\sqrt{3}-5\times3=30-15=15$,

$y(\dfrac{5}{\sqrt{3}})=10\sqrt{3}\times\dfrac{5}{\sqrt{3}}-\dfrac{5\times5^2}{3}=50-\dfrac{125}{3}=\dfrac{25}{3}$ 이다.

3.



제시문에 의해 t초 후 공의 위치는 $(x(t), y(t))=(10t, 10\sqrt{3}\,t-5t^2)$이다.

$y(t)=-5(t-\sqrt{3})^2+15<50$이므로 항상 그림자가 생긴다.

$x'(t)=10$, $y'(t)=10\sqrt{3}-10t$이므로, 공의 속력을 $v(t)$라 하면

$|v(t)|^2=(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2=10^2+(10\sqrt{3}-10t)^2=10^2(t^2-2\sqrt{3}\,t+4)$이다.

$v(t)=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 이 되는 시간을 구하면

$10^2(t^2-2\sqrt{3}\,t+4)=\dfrac{20^2}{3} \quad\Rightarrow\quad t^2-2\sqrt{3}\,t+4=\dfrac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{3}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$t_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $t_2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 이라 하자.

그림자의 위치를 $z(t)$ 라고 하면 $z(t)=x(t)+p(t)$ 인데, 삼각형의 닮음에 의해 $\frac{y(t)}{p(t)}=\frac{50}{x(t)+p(t)}$ 이다.

$y(t)(x(t)+p(t))=50p(t)$ 이므로 $p(t)=\frac{x(t)y(t)}{50-y(t)}$ 이다. 따라서, $z(t)=\frac{50x(t)}{50-y(t)}$ 이고,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{50x'(t)(50-y(t))+50x(t)y'(t)}{(50-y(t))^2} \\ &= \frac{50^2x'(t)-50x'(t)y(t)+50x(t)y'(t)}{(50-y(t))^2} \end{aligned}$$

이다.

$x(t_1)=\frac{20\sqrt{3}}{3}$, $y(t_1)=20-5\times\frac{4}{3}=\frac{40}{3}$, $x'(t_1)=10$, $y'(t_1)=10\sqrt{3}-\frac{20\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 이고

$x(t_2)=\frac{40\sqrt{3}}{3}$, $y(t_2)=40-5\times\frac{16}{3}=\frac{40}{3}$, $x'(t_2)=10$, $y'(t_2)=10\sqrt{3}-\frac{40\sqrt{3}}{3}=\frac{-10\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서

$$z'(t_1)=\frac{50^2\times10-50\times10\times\frac{40}{3}+50\times\frac{20\sqrt{3}}{3}\times\frac{10\sqrt{3}}{3}}{(50-\frac{40}{3})^2}=\frac{3\times13\times50}{11^2}=\frac{1950}{121}\ \mathrm{m/s}$$

$$z'(t_2)=\frac{50^2\times10-50\times10\times\frac{40}{3}+50\times\frac{40\sqrt{3}}{3}\times\frac{-10\sqrt{3}}{3}}{(50-\frac{40}{3})^2}=\frac{3\times7\times50}{11^2}=\frac{1050}{121}\ \mathrm{m/s}$$

이다.