한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2) 의예-2번

1. 우선 2인용 배만 무인도 A로 돌아오는 경우는 아래의 두 가지 사건 중 하나가 일어난 경우이다.

(1) 사건 X: 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 1인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

(2) 사건 Y: 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

사건 X가 일어나면 무인도 B에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 남게 된다. 사건 Y가 일어나면 무인도 A에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 있게 된다. 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로, '2인용 배가 무인도 A로 돌아왔을 때 남은 한 명이 무인도 B에 남을 확률'은

$\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X\cup Y)}=\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)}=\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)}$ 이다. 구체적인 계산은 아래와 같다.

- $\mathrm{P}(X) = {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)\times\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)$
- $\mathrm{P}(Y)=\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$

따라서 구하고자 하는 확률 $\frac{\mathrm{P}(X)}{\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)}$은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)\times\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)}{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)\times\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)+\left({}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)}{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)+1}=\frac{3}{3+8}=\frac{3}{11}$$ 이고, $p=3, q=11, p+q=14$ 이다.

2. $$\sum_{k=1}^{n}k\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{P}}\right|^2=\sum_{k=1}^{n}k\left\{\left(x-\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)^2+\left(y-\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\left(x^2+y^2+1\right)-2\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}x-2\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}y=n^2$$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$(x^2+y^2+1)-\frac{2\cdot 2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}x-\frac{2\cdot 2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}y=\frac{2n^2}{n(n+1)}$$

따라서

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{2(k-1)\pi}{n},\ b_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{2(k-1)\pi}{n},\ r_n^2=\frac{2n^2}{n(n+1)}-1+a_n^2+b_n^2$$

이로부터

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k-1}{n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n^2}\right\}$$

그런데 정적분의 정의와 부분적분법을 사용하면

$$2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k-1}{n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\frac{1}{n}=2\int_0^1 x\cos(2\pi x)dx=\left[\frac{x}{\pi}\sin(2\pi x)\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(2\pi x)dx=0$$

이고,

$$-\frac{1}{n} \le -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} \le \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n^2} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

이므로, 극한의 성질에 의해 $2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n^2} = 0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

비슷하게,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}\frac{1}{n} = 2\int_0^1 x\sin(2\pi x)dx = \left[-\frac{x}{\pi}\cos(2\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1\cos(2\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}$$

이를 종합하면

$$\lim_{n\to\infty} r_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n^2}{n(n+1)} - 1 + a_n^2 + b_n^2\right\} = 2 - 1 + 0 + \frac{1}{\pi^2} = \frac{\pi^2+1}{\pi^2} \text{ 즉, } \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\pi}$$

3. $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_1$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n+1}} = \vec{0}$이다. 따라서

$$d_n = (1-c_n)\sum_{k=1}^{n+1} c_n^k\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right| = \sum_{k=1}^{n+1}\left(c_n^k - c_n^{k+1}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right|$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} c_n^k\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right| - \sum_{k=1}^{n} c_n^{k+1}\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right| = \sum_{k=1}^{n} c_n^{k+1}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right|\right)$$

O를 원점이라 하자.

자연수 k가 $1 \le k \le \frac{n}{2}+1$이면 $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_k = \frac{2(k-1)\pi}{n}$이고, $\frac{n}{2}+1 < k \le n$이면 $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_k = 2\pi - \frac{2(k-1)\pi}{n}$이다.

그러므로 모든 자연수 $1 \le k \le n$에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right| = 2\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$이고 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n+1}}\right| = 0 = 2\sin\frac{n\pi}{n}$

삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right| = 2\left\{\sin\frac{k\pi}{n} - \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right)\right\} = 2\left\{\sin\frac{k\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + \cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right\}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n} c_n^{k+1}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right|\right) = 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\sin\frac{k\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

우변의 각 항을 나누어 계산하면, 우선 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le c_n \le 1$이라는 사실과 제시문 **<다>**로부터

$$0 \le 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\sin\frac{k\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \le \left(\frac{\pi}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n} 1 \le \frac{\pi^2}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

따라서 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\sin\frac{k\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

또한 정적분의 정의와 치환적분법, $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}}\cos\frac{k\pi}{n}\frac{1}{n} = 2\pi\int_0^1 e^{-\pi x}\cos(\pi x)dx = 2\int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt$$

부분적분법을 이용하여 $e^{-t}\cos t$의 부정적분을 구하면

$$\int e^{-t}\cos t\,dt = e^{-t}\sin t + \int e^{-t}\sin t\,dt = e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\cos t\,dt$$

이므로

$$\int e^{-t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) + C \text{ (}C\text{는 적분 상수) 즉, } 2\int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt = \left[e^{-t}(\sin t - \cos t)\right]_0^{\pi} = 1 + e^{-\pi}$$

이로부터

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_n^{k+1}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{k+1}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\sin\frac{k\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} 2c_n\sum_{k=1}^{n} c_n^k\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} = 1 + e^{-\pi}$$