한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 음함수의 미분법을 이용하면

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}\frac{dy}{dx}=0$$

이다. 즉, $y\neq 0$ 일 때

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$$

를 얻는다. 따라서 $(-1,\frac{3}{2})$를 지나는 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

2. 포물선 $x=y^2$ 위의 점을 (a,b)라고 하자. 그러면 $a=b^2$이 성립한다. 원점이 아닌 점에서의 포물선에 접하는 접선의 기울기를 구하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ 이므로 원점이 아닌 점 (a,b)를 지나고 포물선 $x=y^2$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2b}(x-a)+b$$

가 된다. 평면위의 점 $(-3,1)$이 이 직선위에 있다고 하면 $1=\frac{1}{2b}(-3-a)+b$, 즉, $2b=-3-a+2b^2$을 만족하는데, 앞서 포물선 위의 점은 $a=b^2$ 을 만족하므로, $2b=-3-b^2+2b^2$ 이 성립한다. 따라서 $b^2-2b-3=0$을 풀면 $b=3$ 또는 $b=-1$ 을 만족하고, 이에 대응하는 a는 $a=9$또는 $a=1$ 이다. 따라서 포물선 $x=y^2$ 에 접하고 점 $(-3,1)$을 지나는 직선은

점 $(9,3)$에서 접하는 $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$ 과

점 $(1,-1)$에서 접하는 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이다.

두 직선이 x축과 이루는 각을 각각 α와 β라고 하자. (단, $0<\alpha,\beta\leq\frac{\pi}{2}$로 잡는다.) 이 때, $\tan\alpha=\frac{1}{6}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$ 이다. 이를 이용하면 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{37}}$, $\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 를 얻을 수 있고,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{12}{\sqrt{185}}-\frac{1}{\sqrt{185}}=\frac{11}{\sqrt{185}}$ 를 얻는다.

이 때 $\cos(\alpha+\beta)$ 가 양수이므로 $0\leq\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$을 확인할 수 있다. 따라서 $\theta=\alpha+\beta$ 가 되고, $\cos\theta=\frac{11}{\sqrt{185}}$ 이다.

3. 초점 $C(1,0)$을 지나고 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-1)$ 이다. 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 점 A와 점 B의 y좌표값을 알아야 한다. $x=\frac{y}{m}+1$을 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{4}\left(\frac{y}{m}+1\right)^2+\frac{y^2}{3}=1$이 되고, 정리하면 $\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)y^2+\frac{2}{m}y-3=0$ 이 된다. 따라서

$$y_1=\frac{-\frac{1}{m}-\sqrt{\frac{1}{m^2}+3\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}}=-\frac{3m(1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3},$$

$$y_2 = \frac{-\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m^2}+3\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}} = \frac{3m(-1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3}$$

를 얻을 수 있다. 삼각형의 넓이는 $S_1 = -\frac{3}{2}y_1$, $S_2 = \frac{1}{2}y_2$ 이므로,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{2}\frac{3m(1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3}}{\frac{1}{2}\frac{3m(-1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3}} = \frac{3(1+2\sqrt{m^2+1})}{-1+2\sqrt{m^2+1}}$$ 이다.

따라서 $\lim_{m\to 0}\frac{S_1}{S_2} = \lim_{m\to 0}\frac{3(1+2\sqrt{m^2+1})}{-1+2\sqrt{m^2+1}} = 9$ 를 얻는다.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

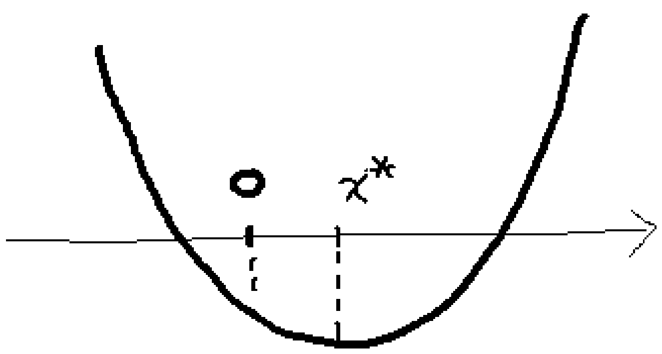
1. 거리가 최소가 되기 위한 필요조건은 점 A와 점 (x_0,y_0)를 연결하는 직선이 (x_0,y_0)에서의 접선에 수직이 되는 것이다. 접선의 기울기는 $-\dfrac{2x}{y}$ 이므로,

$\dfrac{y_0-b}{x_0-a}=\dfrac{y_0}{2x_0}$, 즉, $y_0=\dfrac{2bx_0}{x_0+a}$ 가 되고 이를 $2x^2+y^2=1$에 대입하면,

$$2x^4+4ax^3+(2a^2+4b^2-1)x^2-2ax-a^2=0$$

따라서 답은 $2a^2+4b^2-1$.

2. $f'(x)=8x^3+12ax^2+2(2a^2+4b^2-1)x-2a$, $f''(x)=24x^2+24ax+2(2a^2+4b^2-1)$ 인데,
$f''(x)$의 판별식은 $D=-192(-a^2+4b^2-1)$ 이다.
$a<\dfrac{3}{2}b$ 로부터 $-a^2+4b^2-1>-\dfrac{9}{4}b^2+4b^2-1=\dfrac{7}{4}b^2-1>0$ 이므로 $D<0$이 되어 $f''(x)>0$이다.
따라서 $f'(x)$는 증가함수이며 실근을 오직 하나만 가지며 이 실근은 양수이다.($f'(0)=-2a<0$이므로)
이 실근을 x^*라 하면 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 개형을 가진다.



3. $y_0=\dfrac{2bx_0}{x_0+a}$ 를 $2x^2+y^2=1$에 대입하면,

$\dfrac{4b^2x_0^2}{(x_0+a)^2}-(1-2x_0^2)=0$, $\left(\dfrac{2bx_0}{x_0+a}-\sqrt{1-2x_0^2}\right)\left(\dfrac{2bx_0}{x_0+a}+\sqrt{1-2x_0^2}\right)=0$ 이므로, $\dfrac{2bx_0}{x_0+a}=\sqrt{1-2x_0^2}$ 이다.

$x_0=\dfrac{1}{2}$ 이면, $b=\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+2a}{2\sqrt{2}}$.