한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	오후(1)-1번

1. 일차함수 $f(x)=bx+c$ $(b\neq 0)$가 $(*)$를 만족한다면, 임의의 x,y에 대하여

$$\{f(xy)\}^2=(axy+b)^2=a^2x^2y^2+b^2+2abxy, \qquad f(x^2)f(y^2)=(ax^2+b)(ay^2+b)=a^2x^2y^2+abx^2+aby^2+b^2$$

이므로

$$a^2x^2y^2+b^2+2abxy=a^2x^2y^2+b^2+abx^2+aby^2.$$

따라서

$$0=ab(x^2+y^2-xy)=ab(x-y)^2$$

이고 $a\neq 0$이므로 $b=0$.

2. $g(x)=ax^k+f(x)$가 $(*)$를 만족한다면, 임의의 x,y에 대하여

$$\{g(xy)\}^2=\{a(xy)^k+f(xy)\}^2=a^2(xy)^{2k}+f(xy)^2+2a(xy)^kf(xy),$$

$$g(x^2)g(y^2)=(ax^{2k}+f(x^2))(ay^{2k}+f(y^2))=a^2(xy)^{2k}+f(x^2)f(y^2)+ay^{2k}f(x^2)+ax^{2k}f(y^2)$$

이고, $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$이므로

$$2a(xy)^kf(xy)=ax^{2k}f(y^2)+ay^{2k}f(x^2).$$

다시 양변을 제곱하면

$$4a^2x^{2k}y^{2k}\{f(xy)\}^2=a^2x^{4k}f(y^2)^2+a^2y^{4k}f(x^2)^2+2a^2x^{2k}y^{2k}f(x^2)f(y^2)$$

이고, $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$을 이용하여 정리하면

$$a^2\{x^{2k}f(y^2)-y^{2k}f(x^2)\}^2=0.$$

따라서, 임의의 x,y에 대하여

$$x^{2k}f(y^2)-y^{2k}f(x^2)=0.$$

한편, $f(x)$가 $(k-1)$차 함수이므로 $f(p)\neq 0$인 실수 p가 존재한다. 따라서 이 p와 임의의 y에 대해

$$p^kf(y^2)-y^{2k}f(p)=0.\text{---------------}(**)$$

하지만 $f(p)\neq 0$이어서 임의의 y에 대해 $(**)$는 성립할 수 없고, $(*)$를 만족하는 $g(x)$는 존재하지 않는다.

3. 임의의 y에 대하여 $f(0)^2=f(0)f(y^2)$이므로, 만약 $f(0)\neq 0$면 $f(y)=f(0)$. 한편, $f(x)$가 상수함수가 아니므로 $f(0)=0$임을 알 수 있다.

이제 $f(x)$를 k차 다항함수라 하자. $f(0)=0$이므로, 인수정리(나머지정리)에 의해 적당한 $(k-1)$차 다항함수 $g(x)$에 대해

$$f(x)=xg(x).$$

한편 임의의 x,y에 대하여 $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$이므로

$$(xy)^2\{g(xy)\}^2=x^2g(x^2)y^2g(y^2)=(xy)^2g(x^2)g(y^2)$$

따라서 $(k-1)$차 다항함수 $g(x)$ 역시 $(*)$를 만족한다. 다시 $g(x)$가 상수함수가 아니므로 $g(0)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)$ 역시 x를 약수로 가짐을 알 수 있다. 결국 위의 방법을 반복하면

$$f(x)=ax^k\,(a\neq 0).$$

한편 $a=f(1)=2019$이므로

$$f(x)=2019x^k.$$

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 학생의 수가 n명인 학급의 담임 선생님은 k명으로 구성된 조가 방문하면 이들에게 나눠줄 k개의 연필을 준비해야한다. k명으로 구성된 조는 ${}_nC_k$개가 가능하므로 어떤 경우라도 연필을 나누어 줄 수 있기 위해 담임 선생님이 준비해야하는 연필의 최소 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k \times {}_nC_k$이다. 이를 이항정리를 활용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k \times {}_nC_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \times \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \times {}_{n-1}C_{k-1} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

따라서, 구하고자 하는 연필의 최소개수는 $n2^{n-1}$개다.

2. 담임 선생님은 k명으로 구성된 조가 방문하면 이들에게 나눠줄 k^2개의 공책을 준비해야한다. k명으로 구성된 조는 ${}_nC_k$개가 가능하므로 담임 선생님이 준비해야하는 공책의 최소개수는 $\sum_{k=1}^{n} k^2 \times {}_nC_k$이다. 이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k^2 \times {}_nC_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times k \times \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times n \times \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times n \times {}_{n-1}C_{k-1} \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \times {}_{n-1}C_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\right) \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n-1} k \times {}_{n-1}C_k + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\right)
\end{aligned}$$

1번 문제의 결과에 n대신 $n-1$을 대입한 결과 $\sum_{k=1}^{n-1} k \times {}_{n-1}C_k = (n-1)2^{n-2}$와 이항정리를 적용하면 위 식은 $n\{(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}\} = n(n+1)2^{n-2}$와 같다. 따라서, 구하고자 하는 공책의 최소개수는 $n(n+1)2^{n-2}$개다.

3. 3명이 조를 짜서 방문하면 각 조원들은 3권의 공책을 받는다. 공책의 색깔이 매번 임의로 선택이 되기 때문에 3권 중 2권이상이 파란색 공책일 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$이다. 한 학생이 포함되며 조원이 3명인 조가 6개가 있고, 6번 방문에서 매번 공책의 색깔은 독립적으로 결정되므로 구하고자 하는 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$이다.