한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

[문제 1]

1. 제시문 <가>의 곡선은

$$x(t) = 2\sin t,\ y(t) = 3\cos(2t) = 3(1-2\sin^2 t) = 3\left\{1 - \frac{x(t)^2}{2}\right\}$$

이다. 즉, $y = 3(1-\frac{x^2}{2})$ $(-2 \le x \le 2)$이다.

이 곡선이 점 $(\pm\sqrt{2},0)$에서 x축과 만나므로, $\mathrm{F}(\sqrt{2},0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{2},0)$으로 놓을 수 있다. 그리고 $\mathrm{P}(0,3)$, $\mathrm{Q}(0,-3)$이다. 그러므로 두 초점이 F, F′이고 선분 PQ가 단축인 타원의 장축의 길이는 $2\sqrt{3^2+2} = 2\sqrt{11}$이다. 이로부터 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2. $A=1$, $B=3$, $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$일 때, 제시문 <가>의 곡선이 x축과 만나는 점 R의 좌표를 계산하자.

$$y(t) = 3\cos(2t+\theta) = 0$$

그런데 $\frac{3\pi}{4} < 2t+\theta < \frac{7\pi}{4}$이므로 $2t+\theta = \frac{3\pi}{2}$, 즉, $t = \frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$가 되고 이로부터 $x(t) = \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$를 얻는다. 따라서 R의 좌표는 $(\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}),0)$이다.

제시문 <가>의 곡선이 y축과 만나는 점 S의 좌표를 계산하자.

$$x(t) = \sin t = 0$$

그런데 $0 \le t \le \frac{3\pi}{8}$이므로 $t=0$이고 $y(0) = 3\cos\theta$이다. 따라서 S의 좌표는 $(0, 3\cos\theta)$이다.

이제 y좌표가 최소가 되는 점 T를 찾자. $\cos(2t+\theta) = -1$일 때 y좌표가 최소가 되므로, $2t+\theta = \pi$, 즉 $t = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$를 얻는다. 따라서 T의 좌표는 $(\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}),-3) = (\cos\frac{\theta}{2},-3)$이다. 점 U는 점 T를 y축에 대하여 대칭 이동하여 얻어지므로 U의 좌표는 $(-\cos\frac{\theta}{2},-3)$이다.

그러므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \overrightarrow{\mathrm{RU}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ST}} = (-\cos\frac{\theta}{2} - \sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}),-3)\cdot(\cos\frac{\theta}{2},-3-3\cos\theta) \\ &= \cos\frac{\theta}{2}(-\cos\frac{\theta}{2} - \sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})) + 9 + 9\cos\theta \end{aligned}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하면

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(\sin\frac{\theta}{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}) + \cos\frac{\theta}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})) - 9\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\theta) - 9\sin\theta = -\frac{17}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\theta) \end{aligned}$$

θ에 $\frac{5\pi}{6}$를 넣으면 $f'(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{17}{2}\sin\frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}$

그런데 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$이고 $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로

$$f'(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{17}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

3. $x(t)^2 + 2y(t)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$이므로 제시문 <나>의 곡선은 타원 $x^2 + 2y^2 = 1$이다.

기울기가 m인 접선의 방정식을 $y = mx + n$라 하면, 교점의 x좌표는 $x^2 + 2(mx+n)^2 = 1$을 만족한다. 중근을 가져야 하므로,

$$D/4 = (2mn)^2 - (1+2m^2)(2n^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2n^2 = 2m^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad n = \pm\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}}$$

따라서 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}}$ 이다.

기울기가 m인 접선이 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 지날 때($a \neq \pm 1$)

$$b = ma \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad (b - ma)^2 = m^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1)m^2 - 2abm + b^2 - \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{------------} \quad ①$$

식 ①의 두 근을 m_1, m_2라 하면, 두 직선이 서로 수직으로 만날 조건에 의해 $m_1 m_2 = \dfrac{b^2 - \frac{1}{2}}{a^2 - 1} = -1$이다. 따라서 $a^2 + b^2 = \dfrac{3}{2}$을 만족한다. 한편, $a = \pm 1$일 때 즉, 점 $\mathrm{P}(a, b)$의 좌표가 $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$일 때도 모두 타원에 그은 접선은 수직이고, $a^2 + b^2 = \dfrac{3}{2}$을 만족하므로 점 P의 자취는 중점이 원점 $(0,0)$이고 반지름이 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$인 원이다.

	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1. 문제에서 주어진 이차방정식을 $h(x) = x^2 - 2(st - \vec{a} \bullet \vec{b})x + 1$으로 나타내자.

두 부등식 $\beta \le \dfrac{s}{t} \le \alpha$, $\beta \le \dfrac{t}{s} \le \alpha$를 보이기 위하여 이차함수 $h(x)$의 그래프를 생각하면, $h\left(\dfrac{t}{s}\right) \le 0$, $h\left(\dfrac{s}{t}\right) \le 0$임을 보이면 된다.

우선 $h\left(\dfrac{t}{s}\right)$, $h\left(\dfrac{s}{t}\right)$를 계산하면 다음과 같다.

$$h\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{t^2}{s^2} - 2(st - \vec{a} \bullet \vec{b})\frac{t}{s} + 1 = \frac{1}{s^2}(t^2 - 2st(st - \vec{a} \bullet \vec{b}) + s^2)$$

$$h\left(\frac{s}{t}\right) = \frac{s^2}{t^2} - 2(st - \vec{a} \bullet \vec{b})\frac{s}{t} + 1 = \frac{1}{t^2}(s^2 - 2st(st - \vec{a} \bullet \vec{b}) + t^2).$$

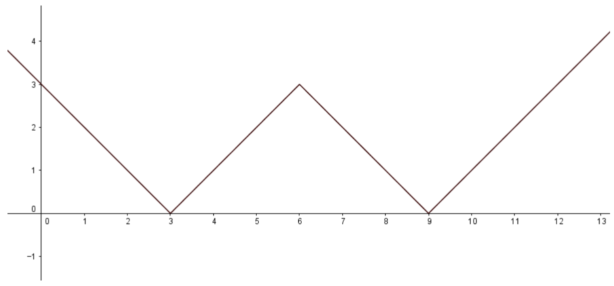
그런데, 양수 s, t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$2st(\vec{a} \bullet \vec{b}) \le 2st|\vec{a}||\vec{b}| \le s^2|\vec{b}|^2 + t^2|\vec{a}|^2 = 2s^2t^2 - s^2 - t^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

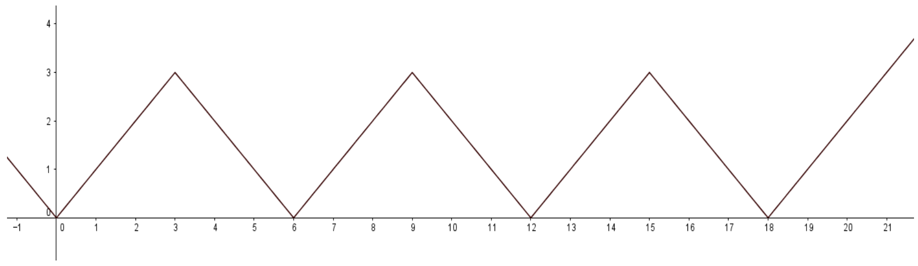
①의 부등식을 정리하면, $t^2 + 2st(\vec{a} \bullet \vec{b}) + s^2 - 2s^2t^2 = t^2 - 2st(st - (\vec{a} \bullet \vec{b})) + s^2 \le 0$이다.

그러므로 $h\left(\dfrac{t}{s}\right) \le 0$, $h\left(\dfrac{s}{t}\right) \le 0$ 이다.

2. $f(x-3)=||x-6|-3|$ 과 $f^2(x-3\cdot2)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x-3)$



$f^2(x-3\cdot2)$

A_1 의 넓이는 $S_1=\pi\left[\sum_{k=1}^{2}(24k-12)\right]=48\pi$ 이다.

같은 방법으로 n이 홀수, 짝수인 경우를 나누어 생각하여 넓이를 구할 수 있다.

A_{2n-1} 의 넓이를 계산하면, $S_{2n-1}=\pi\{27(2n-1)^2+18(2n-1)+3\}$ 이다.

A_{2n} 의 넓이를 계산하면, $S_{2n}=\pi\{27(2n)^2+18(2n)+1\}$이다.

A_n 의 넓이를 구해보면, $S_n=\pi\{27n^2+18n+(-1)^{n+1}+2\}$이다.

그러므로 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=27\pi$ 이다.

3. S를 정사각형 EFGH 에 들어있는 넓이가 최대인 정삼각형이라 하면,

S를 적당히 이동해 의해 S의 두 꼭짓점 P, Q 는 정사각형 EFGH 의 인접한 두 변에 놓여있다고 할 수 있다. 이 두 변을 변 FG 와 변 GH 라 가정하자.

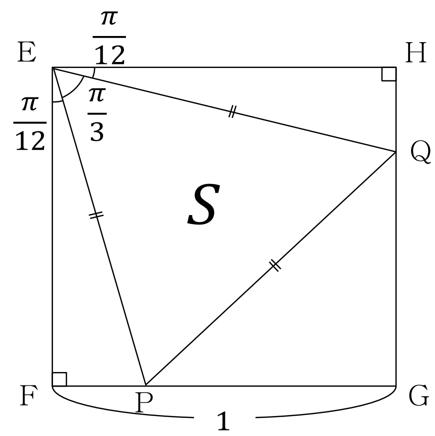
S의 다른 한 꼭짓점이 정사각형 EFGH 의 내부에 있다면,

S보다 넓이가 더 큰 정삼각형을 찾을 수 있으므로 모순이다.

따라서 S의 다른 한 꼭짓점은 변 EF 또는 변 HE 위에 있다.

이 꼭짓점이 변 EF 또는 변 HE 위에 있고 점 E가 아니라면,

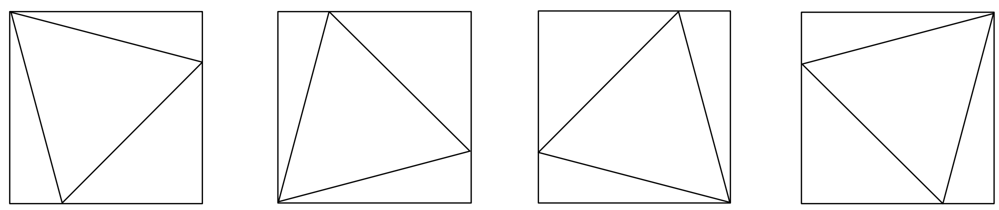
평행이동에 의해 꼭짓점 P 또는 Q 를 정사각형 EFGH 의 내부에 있도록 할 수 있어 모순이다. 따라서 정삼각형 S의 다른 한 꼭짓점은 점 E이다.



이 때, 삼각형 EPF 와 삼각형 EQH 는 합동이고, $\frac{1}{\overline{\mathrm{EP}}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{EP}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 이다. 따라서 S의 넓이$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{3}-3$ 이다.

정사영 S의 한 꼭짓점이 정사각형 EFGH 의 한 꼭짓점이 되므로 이 꼭짓점의 선택에 따라 정사영 S는 다음 4가지 경우 중 하나가 되고, 각 경우 3개의 T가 존재하므로 구하는 T는 모두 12개 이다.



12개의 삼각형 T는 모두 합동임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 그 중 하나인 삼각형 APQ 의 넓이를 구하자. T 를 포함하는 평면의 방정식은

$x+y+\sqrt{3}z=3-\sqrt{3}$ 이고, 이 평면과 xy-평면이 이루는 각을 θ 라 하면,

$\cos\theta=\frac{1\cdot 0+1\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+\sqrt{3}^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 (T 의 넓이)$\times\cos\theta=$ (S의 넓이) 이므로

T 의 넓이 $=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\left(2\sqrt{3}-3\right)=2\sqrt{5}-\sqrt{15}$ 이다.