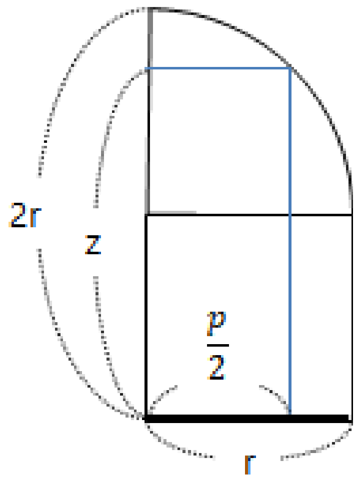
자 연 계	**한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시** **논 술 예 시 답 안**	오후(2) 의예-1번

1. 인공위성의 가로, 세로, 높이를 x, y, z 라고 하면 부피는 xyz 이다.

산술 기하 평균을 이용하면 $xyz \le \frac{x^2+y^2}{2}z$ 이고 $x=y$ 일 때 등호가 성립한다.

직육면체 밑면의 대각선의 길이를 p 라고 하면, $p^2=x^2+y^2$ 이므로 $xyz \le \frac{p^2 z}{2}$ 가 된다.

부피가 최대가 되기 위해서는 화물칸에 내접해야 하고, 그 경우 오른쪽 그림과 같이 직육면체 윗면의 꼭짓점이 반구에 닿아야 하므로



$(z-r)^2+(\frac{p}{2})^2=r^2$

을 만족해야 한다. 즉, $p^2=4(r^2-(z-r)^2)$ 이 된다. 부피를 z 에 관한 함수 $f(z)$ 라고 하면

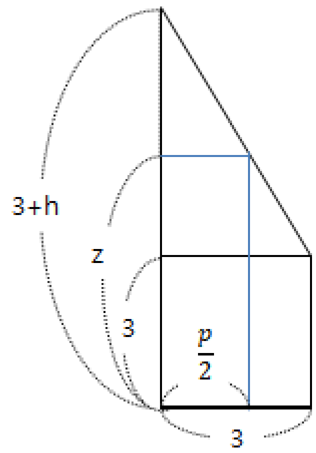
$f(z)=-2z^2(z-2r)$

이다. 또한, 최대 부피를 가지기 위한 z 의 범위는 $r \le z \le 2r$ 이 된다. 함수 $f(z)$ 의 극댓값을 구하기 위해 도함수를 구하면

$f'(z)=-6z^2+8rz=-2z(3z-4r)$

이고, $z=\frac{4r}{3}$ 일 때 극댓값을 갖는다. 따라서 최대 부피는 $f(\frac{4r}{3})=\frac{64r^3}{27}$ 이 된다.

2. 어떤 부피를 싣기 위한 h 의 최솟값을 구하기 위해서는 우선 h 가 고정되었을 때 부피의 최댓값을 알아야 한다. 앞의 문제와 마찬가지로 인공위성의 가로, 세로, 높이를 x, y, z 라 하고 밑면의 대각선의 길이를 p 라고 하자. 부피가 최대가 되기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 화물칸에 내접해야하므로, 삼각형의 닮음을 이용하여



$\frac{h}{3}=\frac{2(3+h-z)}{p}$

가 되어야 한다. 따라서 $p=\frac{6(3+h-z)}{h}$ 이다. 인공위성의 높이가 z 일 때 부피의 최댓값을 $g(z)$ 라고 하면

$g(z)=\frac{18z(z-(3+h))^2}{h^2}$

이 된다. 도함수를 구하면

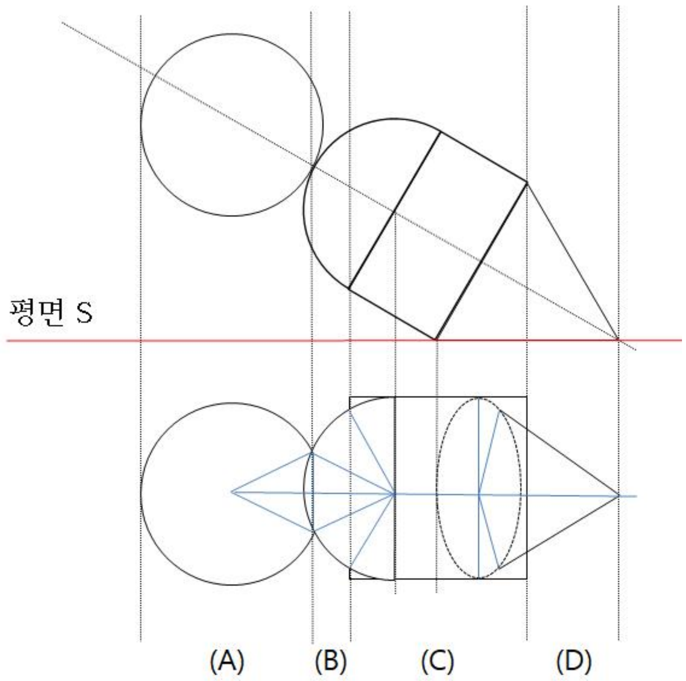
$g'(z)=\frac{18}{h^2}(3z^2-4(3+h)z+(3+h)^2)=\frac{18}{h^2}(3z-(3+h))(z-(3+h))$

이고 $z=\frac{3+h}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다. 이 때, $h \le 6$ 이면 $z=3$ 에서 최댓값을 갖는데, 그 때 부피는 $g(3)=54$ 이므로 $h \le 6$ 일 수 없다. $h>6$ 인 경우 극댓값이 최댓값이 되는데, 그 때 부피는 $g(\frac{3+h}{3})=\frac{18}{h^2}\frac{4(3+h)^3}{27}=\frac{72(3+h)^3}{27h^2}$ 이다. 즉, $\frac{72(3+h)^3}{27h^2}=64$ 를 만족해야 한다. $h>6$ 에서 방정식 $(h+3)^3=24h^2$ 을 풀면

$(h-3)(h^2-12h-9)=0$

이다. 따라서 $h=3(2+\sqrt{5})$ 일 때 부피가 64인 인공위성을 넣을 수 있다.

3. 그림에 주어진 도형을 평면 S로 정사영 시키면 다음 그림과 같은 형태의 평면도형이 나온다. 평면 S와 그림의 도형의 중심축이 이루는 각도는 $\frac{\pi}{6}$이다. 따라서 중심축과 평행한 길이 l인 선분은 정사영의 길이가 $l\cos\frac{\pi}{6}=\frac{l\sqrt{3}}{2}$ 이 된다.



정사영을 $(A), (B), (C), (D)$의 네 구역으로 나누어 계산할 수 있다.
구의 평면 S 위로의 정사영은 구가 된다. 따라서 (A)의 넓이는 중심각이 $\frac{5\pi}{3}$인 부채꼴과 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이이다.

$((A)\text{의 넓이})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B)는 부채꼴과 삼각형의 넓이를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$((B)\text{의 넓이})=(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})-(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{\pi}{6}$

(C)는 정사영에 의해 가로의 길이가 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 세로의 길이가 2인 직사각형이므로 다음과 같다.

$((C)\text{의 넓이})=2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=2+\sqrt{3}$

원뿔의 밑면에 있는 점과 꼭짓점에 있는 점을 연결한 모든 선분은 정사영의 범위에 들어가야 한다. 따라서 (D)의 선분은 (C)안에 있는 타원에 접하게 된다. 따라서 (D)의 넓이를 구하기 위해서는 접선의 기울기를 구하여야 한다. 타원이 원점에 놓여있고, $(\frac{3}{2},0)$을 지나는 직선이 타원에 접한다고 하자.

타원의 방정식은 $4x^2+y^2=1$이고, 음함수 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있다.

$8x\,dx+2y\,dy=0$이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{y}$를 얻고, 타원 위의 점 (a,b)에서의 접선은 $y=-\frac{4a}{b}(x-a)+b$가 된다. 이 접선이 점 $(\frac{3}{2},0)$를 지나므로 $-\frac{4a}{b}(\frac{3}{2}-a)+b=0$를 얻고, 타원의 점이므로 $4a^2+b^2=1$을 만족한다. 두 조건을 만족하는 점 (a,b)는 $(\frac{1}{6},\frac{4\sqrt{2}}{6})$, $(\frac{1}{6},-\frac{4\sqrt{2}}{6})$이고 접선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$이 된다. 이를 이용하여 (D)의 삼각형의 넓이를 구하면

$((D)\text{의 넓이})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이다. 이를 모두 더하면 정사영의 넓이를 구할 수 있다.

$(\text{정사영의 넓이})=\pi+2+\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

자 연 계	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(2) 의예-2번

1. ① $x \ge 1$인 경우; $t \in [1, x]$에 대하여 $\dfrac{x}{t} \ge 1$ 이다.

따라서 $x\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{x}{t}\,dt \ge \int_1^x 1\,dt = x-1$이다.

② $0 < x < 1$인 경우; $t \in [x, 1]$에 대하여 $-\dfrac{x}{t} \ge -1$이다.

따라서 $x\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{x}{t}\,dt \ge \int_x^1 \left(-\frac{x}{t}\right)dt \ge \int_x^1 (-1)\,dt = \int_1^x 1\,dt = x-1$이다.

그러므로 양의 실수 x에 대하여 $x\ln x \ge x-1$이 성립한다.

$x\ln x \ge x-1$으로부터 자연수 $1 \le n \le k$에 대하여 $\dfrac{a_n}{b_n}\ln\dfrac{a_n}{b_n} \ge \dfrac{a_n}{b_n} - 1$임을 알 수 있다.

위 부등식의 양변에 b_n을 곱하면, $a_n \ln \dfrac{a_n}{b_n} \ge a_n - b_n$ -------------- (*) 이다.

부등식 (*)에서 양변을 $n=1$에서 $n=k$까지 합을 구하면, 다음 부등식을 얻는다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \log\frac{a_n}{b_n} \ge \sum_{n=1}^{k}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} b_n = 0$이므로,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \log a_n \ge \sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n$을 얻는다.

2. $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^4 = 4$ 를 미분하면

$$\Rightarrow 2f(x)f'(x) - 4\{g(x)\}^3 g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{g'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\{g(x)\}^3} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx = \int_0^\pi \left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} - \frac{f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}\right]dx$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} - \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}\right]dx = \int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx - \int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_0^\pi = -\left(\frac{1}{f(\pi)} - \frac{1}{f(0)}\right) = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}$

(2) ①의 관계식에 의해 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx = \int_0^\pi \frac{\{g(x)\}^3}{f(x)} \frac{(3g'(x))}{\{g(x)\}^4}dx = \frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)} \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}dx$$

따라서 적분값을 구하면,

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)}\,\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(x)f'(x)}{f(x)\left(\{f(x)\}^2-4\right)}\,dx\;=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4}\,dx$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^{\pi}\left(\frac{f'(x)}{f(x)-2}-\frac{f'(x)}{f(x)+2}\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}\left[\,\ln|\,f(x)-2\,|-\ln|\,f(x)+2\,|\,\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{8}\{\ln 3-\ln 7+\ln 5\}=\frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$$

(1)과 (2)로부터 구하는 적분값은 $-\frac{2}{15}+\frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$ 이다.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n=27$ 이므로, $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln a_n=\ln 27$ 이다. 마찬가지로, $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln b_n=\ln 64$ 이다.

자연수 n 에 대하여 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$ 이라 하면, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b_n)^n}{(a_n)^n}=\frac{64}{27}\neq 0$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$ 임을 알 수 있다.

구하는 극한을 변형하면, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{b_n}{a_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n$ 이다.

로그함수 $\ln x$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는 1이므로, $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\,x-\ln\,1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ 이다.

그리고 $\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)$의 $x=1$ 에서의 미분계수를 관찰하면, $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)}{x-1}=\frac{2}{3}$ 임을 알 수 있다.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\ln c_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)}=\frac{3}{2}$ 이다.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln c_n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln c_n}{n\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(c_n)^n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(c_n)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n}=\frac{\ln\frac{64}{27}}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n}$$

(1)과 (2)로부터 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n=\frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{64}{27}\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n=27\cdot\frac{16}{9}=48$ 이다.