상 경 계	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	2번

[문제 2번]

1. 두 점의 좌표를 $(m,m^2), (n,n^2)$ 이라 하면,

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=(x_0-m)^2+(y_0-m^2)^2 \\ x_0^2+y_0^2=(x_0-n)^2+(y_0-n^2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2mx_0+2m^2y_0=m^2+m^4 \\ 2nx_0+2n^2y_0=n^2+n^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0+2my_0=m+m^3 \\ 2x_0+2ny_0=n+n^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_0=n^2+nm+m^2+1 \\ 2x_0=-mn(m+n) \end{cases}$$

$2x_0+2y_0=(m+n)^2-mn+1-mn(m+n)$

$mn=2000$ 이므로,

$$2x_0+2y_0=(m+n)^2-mn+1-mn(m+n)=(m+n)^2-2000(m+n)-1999$$
$$=((m+n)-1000)^2-1000^2-1999$$

$mn=2000$ 이고 $m+n$ 값이 1000에 가장 가까운 경우는 $2+1000=1002$이므로
$2x_0+2y_0$의 최솟값은 $m+n=1002$일 때, -1001995 이다.

2.

선택된 두 점의 좌표를 $(m,m^2), (n,n^2)$이라 하고 이 두 점과 원점을 지나는 원의 중심을 (x_0, y_0)라 하면 두 점 $(m,m^2), (n,n^2)$ 는 원 $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y=0$을 지나므로 $2y_0=n^2+nm+m^2+1$이다.

이때, Y의 기댓값은 가능한 모든 m, n 짝에 대해 원의 중심의 y좌표 y_0와 확률 $\frac{1}{{}_{10}C_2}$을 곱하여 모두 더한 값이다.

$m<n$ 이고 $n=k$일 때 가능한 (m,n) 은 $(1,k)$, $(2,k)$, $\cdots$, $(k-1,k)$ 이므로
이들에 대한 $2y_0$의 합을 구하면,

$$\sum_{m=1}^{k-1}\{k^2+km+m^2+1\}=k^2(k-1)+k\frac{(k-1)k}{2}+\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+k-1$$
$$=\frac{1}{6}\{11k^3-12k^2+7k-6\} .$$

가능한 n 값은 $2, \cdots, 10$ 이므로 이들에 대해 위에서 구한 값을 모두 더하면,

$$\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{6}\{11n^3-12n^2+7n-6\}=\frac{1}{6}\left\{11\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-12\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-6\cdot 10\right\}=4830$$

$$\therefore \mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\times 4830\times\frac{1}{{}_{10}C_2}=\frac{483}{9}=\frac{161}{3}$$

(별해)

선택된 두 점의 좌표를 $(m,m^2), (n,n^2)$이라 하고 이 두 점과 원점을 지나는 원의 중심을 (x_0, y_0)라 하면 두 점 $(m,m^2), (n,n^2)$ 는 원 $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y=0$을 지나므로 $2y_0=n^2+nm+m^2+1=(n+m)^2-nm+1$이다.

이때, Y의 기댓값은 가능한 모든 m, n 짝에 대해 원의 중심의 y좌표 y_0와 확률 $\frac{1}{{}_{10}C_2}$을 곱하여 모두 더한 값이다.

따라서 $2y_0$의 합을 구하면 다음과 같다.

n, m은 서로 다른 10 이하의 자연수이므로 $m < n$이라 하면
$m=1$이면 n은 2이상 10이하의 자연수이다.
따라서 $2y_0$의 값의 합은 $8+14+22+32+44+58+74+92+112=456$
같은 방법으로 $m=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$인 경우를 각각 계산하면 아래 표와 같다.

m	n	$2y_0$	m	n	$2y_0$	m	n	$2y_0$		m	n	$2y_0$	m	n	$2y_0$
1	2	8	2	3	20	3	4	38		8	9	218	9	10	272
1	3	14	2	4	29	3	5	50		8	10	245			
1	4	22	2	5	40	3	6	64							
1	5	32	2	6	53	3	7	80							
1	6	44	2	7	68	3	8	98	…						
1	7	58	2	8	85	3	9	118							
1	8	74	2	9	104	3	10	140							
1	9	92	2	10	125										
1	10	112													

따라서 $2y_0$의 값의 합을 구하면 4830이다.
그러므로 $\therefore \mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\times 4830\times\frac{1}{{}_{10}C_2}=\frac{483}{9}=\frac{161}{3}$

3.
선택된 두 점의 좌표를 $(m,m^2),(n,n^2)$이라 하면 원의 방정식 $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y=0$에서 $2x_0=-mn(m+n)$이다.
$m<n$ 이라 하고, $m\cdot n\cdot(m+n)=240$ 인 m, n 을 찾아보면 $(m,n)=(1,15),\ (2,10),\ (4,6)$ 이므로

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1^2+1\cdot 15+15^2+1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2^2+2\cdot 10+10^2+1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{4^2+4\cdot 6+6^2+1}{2}\times\frac{1}{3}=74$$