한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
상 경 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. 조건 <나>로부터 함수 $f(x)$는 구간 $2 \le x < 4$에서 $f(x)=f(x-2)+2=(x-2-a)^3+b(x-2)+2$이고, 이런 과정을 반복하면 함수 $f(x)$는 구간 $2k \le x < 2k+2$(k는 정수)에서 다항함수 $y=(x-2k-a)^3+b(x-2k)+2k$와 일치함을 알 수 있다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $2k < x < 2k+2$(k는 정수)에서 연속이므로 $x=2k$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. 그런데 $f(2k)=\lim_{x\to 2k+0} f(x)$임은 자명하므로 식 $f(2k)=\lim_{x\to 2k-0} f(x)$이 성립하면 된다.

그런데 $f(2k)=f(0)+2k=-a^3+2k$이고 $\lim_{x\to 2k-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\{f(x)+2k-2\}=(2-a)^3+2b+2k-2$이다.

그러므로 방정식 $-a^3+2k=(2-a)^3+2b+2k-2$, 즉 $b=-3a^2+6a-3$을 얻는다.

$\therefore 2a^2+b=-a^2+6a-3$은 $a=3$일 때 최댓값 6을 갖는다.

2. 함수 $f(x)$가 미분가능하면 연속이므로 1번의 풀이로부터 $b=-3a^2+6a-3$이다.

또한 함수 $f(x)$는 구간 $2k < x < 2k+2$(k는 정수)에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2k+h)-f(2k)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(2k+h)-f(2k)}{h}$이 성립해야 한다. 그런데 문제의 조건으로부터

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2k+h)-f(2k)}{h}=3a^2+b$이고 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(2k+h)-f(2k)}{h}=3(2-a)^2+b$이다.

따라서 방정식 $3a^2+b=3(2-a)^2+b$이 성립해야 하므로 $a=1$이고, 함수의 연속조건으로부터

$b=-3a^2+6a-3=0$이다.

$\therefore 2a^2+b$의 값은 $2\cdot 1^2+0=2$이다.

3. 구간 $0 \le x \le 2$(k는 정수)에서 $f'(x)=3(x-1)^2$이므로 문제의 조건으로부터 모든 실수 x에 대하여 $0 \le f'(x) \le 3$이다. 한편, $g(x)=mx-d-f(x)$라 하면 방정식 $f(x)+d=mx$의 해의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

(i) $m \le 0$일 때: 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=m-f'(x) \le 0$이므로 $g(x)$는 감소함수이다. 또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$임을 알 수 있다. 그러므로 이 경우 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1개다. ($\because$사잇값정리)

(ii) $m \ge 3$일 때: 이 경우 $g'(x)=m-f'(x) \ge 0$이므로 $g(x)$는 증가함수이다. 한편, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$이므로($\because x$가 2만큼 증가할 때 $f(x)$는 2만큼 증가하지만 $mx-d$는 $2m \ge 6$만큼 증가) 이 경우도 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1개다.

(iii) $0 < m < 3$일 때: 이 경우 $x_0=1+\sqrt{\frac{m}{3}}$이라 하면 $f'(x_0)=m$이므로 $g'(x_0)=0$이다. 또한 $1 < x < x_0$일 때 $g'(x) > 0$이므로 이 구간에서 함수 $g(x)$는 증가하고 $x_0 < x < 2$일 때 $g'(x) < 0$이므로 이 구간에서 함수 $g(x)$는 감소한다. 그러므로 적당한 d에 대하여 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 2이상이 됨을 알 수 있다.

(i)−(iii)으로부터 문제의 조건을 만족시키는 실수 m의 범위는 $0 < m < 3$이다.