한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	1 번

1. 만약 $x_m = x_{m+l}$ 인 자연수 m과 l이 존재한다면,

$\frac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k} = 1$ 이고 $\frac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 1$ 이므로

=> $\frac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k} = 1 = \frac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$

=> $\frac{1}{p(x_m)} - \frac{1}{p(x_{m+l})} = \sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$

$p(x_m) = p(x_{m+l})$ 이므로 $\sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 0$ 이다. 이는 모순이다.

그러므로 $x_m = x_{m+l}$ 인 자연수 m과 l이 존재하지 않는다.

2. 1번에서 모든 자연수 n에 대해서 $x_n \neq x_{n+1}$ 이므로

임의의 x_n에 대해서 $\frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{p(x_{n+1})} = \frac{1}{x_n} > 0$ 이므로 $p(x_n) < p(x_{n+1})$ 이다. ---(1)

그러므로 $\lim_{n\to\infty} p(x_n)$ 은 발산한다.

3. $\frac{1}{p(x_2)} + \frac{1}{x_1} = 1$ 이므로 $x_1 = 2$, $p(x_2) = 2$ 이다.

x_1	$p(x_2)$
2	2

$x_1 = 2$, $p(x_1) = 1$ => $\frac{1}{p(x_3)} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ 이므로 다음과 같은 3가지 경우를 고려할 수 있다.

=> { $p(x_3) = x_2 = 2^2$ }, { $p(x_3) = 3$, $x_2 = 6$ }, { $p(x_3) = 6$, $x_2 = 3$ }

x_2	$p(x_3)$
3	6
4	4
6	3

=> { $p(x_3) = x_2 = 2^2$ } => $\frac{1}{p(x_4)} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2^2}$ =>

x_3	$p(x_4)$	x_3	$p(x_4)$
5	20	12	6
6	12	20	5
8	8		

{ $p(x_3) = 3$, $x_2 = 6$ } => $\frac{1}{p(x_4)} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}$ =>

x_3	$p(x_4)$
4	12
6	6
12	4

{ $p(x_3) = 6$, $x_2 = 3$ } => $\frac{1}{p(x_4)} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{6}$ =>

x_3	$p(x_4)$	x_3	$p(x_3)$
7	42	15	10
8	24	18	9
9	18	24	8
10	15	42	7
12	12		

이런 방법으로 계속 하다보면 제한된 시간에 $p(x_4)$를 구하기에 시간이 부족하다.

혹은 $x_n = 2^n$ 이고 다항식은 $p(x) = \frac{1}{2}x$ 임을 유추할 수 있는데, 이런경우는 부분점수.

그런데, 모든 자연수 n 에 대해서 $\frac{1}{p(x_{n+1})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1$ 를 만족하므로

=> $\frac{1}{p(x_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k} = 1 = \frac{1}{p(x_{n+1})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$

=> $\frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{p(x_{n+1})} > 0$

=> $\frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{x_n} > 0$

=> $0 < \frac{p(x_n)}{x_n} < 1$ -- (2)

위의 (2) 에 의해 모든 n 에 대해서 $0 < \frac{p(x_n)}{x_n} < 1$ 를 만족하고

(1)에 의해 $f(x_n)$ 값은 n 이 커짐에 따라 증가하고 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 는 서로 다른 자연수들로 이루어져

있으므로 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 도 증가수열이고 다항식 $p(x)$ 의 차수는 1 이하임. ------------(3)

(3) 에의해서 $p(x_1) = 1$ 이고 $p(x_2) = 2$ 이므로 다항식 $p(x)$ 는 상수함수가 아니다.
그러므로 다항식은 $p(x) = cx$ 이다.

$x_1 = 2$, $p(x_1) = 1$ => $f(2) = 2c = 1$ => $c = \frac{1}{2}$ => $p(x) = \frac{1}{2}x$

$p(x_2) = 2$ => $p(x_2) = \frac{1}{2}x_2 = 2$ => $x_2 = 4$

$p(x_3) = 4$ => $p(x_3) = \frac{1}{2}x_3 = 4$ => $x_3 = 8$

.... $x_n = 2^n$ 이고 다항식은 $p(x) = \frac{1}{2}x$

$p(x_4) = 8$

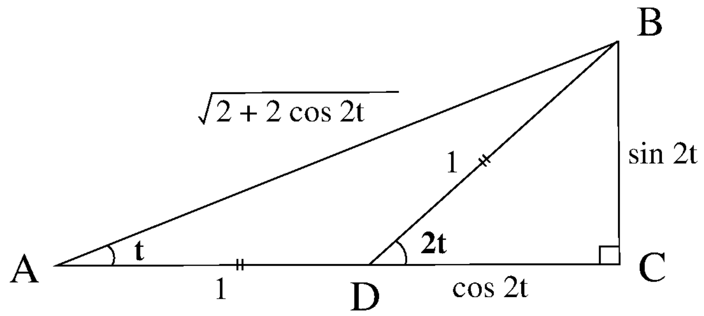
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1.

아래 그림에서, 임의의 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 에 대해, $\cos t = \frac{1+\cos 2t}{\sqrt{2+2\cos 2t}} = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ 이다.

따라서 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ 로 할 수 있다.

이때, $f(\cos 0) = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1 = \cos 0$, $f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 이므로, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\cos t = f(\cos 2t)$ 가 성립한다.



2.

$a_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$,

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = 2f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$,

$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+a_2} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = 2f\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$, ...

로부터 $a_n = 2f\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 임을 알 수 있다. 따라서 극한값은 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 \cdot 1 = 2$ 이다.

3.

$$b_m = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi k}{2^m n}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{\pi k}{2^m n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{2^{m+1}n}\right)\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{m+1}}k}{n}\right)\frac{\frac{\pi}{2^{m+1}}}{n}2^{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2^{m+1}}}\cos t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$$

이다. 따라서 b_1 은 $\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{1+1}\sin\frac{\pi}{2^{1+1}} = \frac{4}{\pi}$ 이고

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}} = \lim_{m\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}}{\frac{\pi}{2^{m+1}}} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$ 이다.