한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	1 번

1. $f'(x)=\frac{1}{3}(1-\sqrt[3]{\frac{15}{x^2}})$이므로 $f(x)$는 $x=\sqrt{15}$에서 최솟값

$$f(\sqrt{15})=\frac{8+\sqrt{15}}{3}-\sqrt[3]{15\sqrt{15}}=\frac{8+\sqrt{15}}{3}-\sqrt{15}=\frac{8-2\sqrt{15}}{3}$$

을 갖는다.

2. $g'(x)=\frac{1}{5}(1-\sqrt[5]{\frac{24}{x^4}})$이고 $g''(x)=\frac{4}{25}\sqrt[5]{\frac{24}{x^9}})$이므로 $g(x)$는 $x=\sqrt[4]{24}$에서 최솟값

$$g(\sqrt[4]{24})=\frac{10+\sqrt[4]{24}}{5}-\sqrt[5]{24\sqrt[4]{24}}=\frac{10+\sqrt[4]{24}}{5}-\sqrt[4]{24}=\frac{10-4\sqrt[4]{24}}{5}>0$$

을 갖는다. 따라서 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)>0$.

3. 1,2번의 내용을 토대로 함수 $h_{2017}(x)=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+x}{2017}-\sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2016}x}$를 생각해보면

$$h_{2017}'(x)=\frac{1}{2017}(1-\sqrt[2017]{\frac{a_1\cdots a_{2016}}{x^{2016}}})$$

이고

$$h_{2017}''(x)=\frac{2016}{(2017)^2}\sqrt[2017]{\frac{a_1\cdots a_{2016}}{x^{4033}}})$$

이므로 $h_{2017}(x)$는 $x=\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$에서 최솟값

$$h_{2017}(\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}})=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}-\sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2016}\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+\sqrt[2016]{a_1\cdots a_k}}{2017}-\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}-2016\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}$$

을 갖는다. 따라서 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$이면 모든 양의 실수 x에 대하여 $h_{2017}(x)\geq 0$이다.

즉, 임의의 양의실수 $a_1,a_2,...,a_{2016}$에 대하여 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$임을 보이면 충분하다.

다시 함수 $h_{2016}(x)=\frac{a_1+\cdots+a_{2015}+x}{2016}-\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2015}x}$에 위의 논리를 적용하면

$\frac{a_1+\cdots+a_{2015}}{2015}\geq\sqrt[2015]{a_1\cdots a_{2015}}$이면 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$이 성립함을 알 수 있다. 결국 이 논리를 반복하면 $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$임을 보이는 것으로 증명이 끝났다는 것을 알 수 있다. 이는

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geq 0$$

으로 증명 끝!!

별해> 임의의 양의실수 $a_1,a_2,...,a_n$과 2이상의 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

임을 n에 대한 수학적 귀납법으로 보이고자 한다. 우선 $n=2$일 때,

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geq 0$$

이므로 성립한다. $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하자. 양의 실수에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{a_1+\cdots+a_k+x}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_kx}$$

의 도함수

$$h'(x)=\frac{1}{k+1}\left(1-\sqrt[k+1]{\frac{a_1\cdots a_k}{x^k}}\right)$$

이므로 $h(x)$는 $x=\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$에서 최솟값

$$h(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k})=\frac{a_1+\cdots+a_k+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}} \text{****************} \quad (1)$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_k+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}-\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}\geq 0$$

을 갖는다. (1)의 마지막 부등식은 수학적 귀납법의 가정의 결과이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1. $\sqrt{a^2+b}-a=\sqrt{a^2+b}-a\dfrac{\sqrt{a^2+b}+a}{\sqrt{a^2+b}+a}=\dfrac{a^2+b+a\sqrt{a^2+b}-a\sqrt{a^2+b}-a^2}{\sqrt{a^2+b}+a}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}<\dfrac{b}{2a}$

이 성립한다. 같은 방법으로, 계산하면

$$a-\sqrt{a^2-b}=a-\sqrt{a^2-b}\,\frac{\sqrt{a^2-b}+a}{\sqrt{a^2-b}+a}=\frac{a\sqrt{a^2-b}+a^2-(a^2-b)-a\sqrt{a^2-b}}{\sqrt{a^2-b}+a}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b}+a}>\frac{b}{2a}$$

을 얻는다. 따라서 $\sqrt{a^2+b}-a<\dfrac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$ 이다.

2. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$로부터

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a=\frac{(a^3+b)-a^3}{(\sqrt[3]{a^3+b})^2+a\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}=\frac{b}{(\sqrt[3]{a^3+b})^2+a\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}<\frac{b}{3a^2}$$

이 성립함을 알 수 있다. 마찬가지 방법으로

$$a-\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{a^3-(a^3-b)}{a^2+a\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2}=\frac{b}{a^2+a\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2}>\frac{b}{3a^2}$$

을 얻는다. 따라서 $\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$ 이 성립한다.

3. 문항 1에서 부등식

$$\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}\ \cdots\cdots\cdots\ ①$$

이 성립한다. 우선, $75^2=5625$ 이므로, 부등식 ① 에 의해 부등식

$$|75-\sqrt{5627}|=\sqrt{5627}-75=\sqrt{75^2+2}-75<\frac{2}{2\cdot 75}=\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 또한 문항 2의 증명으로부터 부등식

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a<\frac{b}{3a^2}<a-\sqrt[3]{a^3-b}\cdots\cdots\cdots\ ②$$

이 성립함을 알 수 있다. $341=343-2=7^3-2$이므로, 부등식 ② 에 의해

$$|7-\sqrt[3]{341}|=7-\sqrt[3]{341}=7-\sqrt[3]{7^3-2}>\frac{2}{3\cdot 7^2}=\frac{2}{147}>\frac{1}{73.5}>\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 그러므로 $|75-\sqrt{5627}|<|7-\sqrt[3]{341}|$임을 알 수 있다.