한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

상 경 계	**논 술 예 시 답 안**	2 번

1. $f^{-1}(x)=f(f(x))$ 이면, $f(f(f(x)))=x$. 역으로 $f(f(f(x)))=x$ 이면 $f^{-1}(x)=f(f(x))$.

만약 $f(x)=x$ 이면 $f(f(f(x)))=f(f(x))=f(x)=x$ 이므로, $f(x)=x$ 인 x 는 방정식 $f(f(f(x)))=x$ 의 해가 된다. 방정식 $f(x)=x$ 를 풀면, $f(x)=x$ 가 성립하게 하는 실수 x 는 2 뿐이다.

평균값의 정리와 $f'(t)=3t^2+2\geq 2$ 를 사용하면, $x<y$ 인 임의의 실수 x 와 y 에 대해 $f(y)-f(x)\geq 2(y-x)$ 가 성립한다. 더 나아가, $f(f(y))-f(f(x))\geq 2(f(y))-f(f(x)))\geq 4(y-x)$ 이고 $f(f(f(y)))-f(f(f(x)))\geq 2(f(f(y))-f(f(x)))\geq 8(y-x)$. 이제 a 가 $a>2$ 이면서 $f(f(f(x)))=x$ 의 해이면 $a-2=f(f(f(a)))-f(f(f(2)))\geq 8(a-2)$ 가 성립하므로 모순이다. a 가 $a<2$ 이면서 $f(f(f(x)))=x$ 의 해이면 비슷하게 $2-a=f(f(f(2)))-f(f(f(a)))\geq 8(2-a)$ 가 성립하므로 모순이다. 따라서 $f^{-1}(x)=f(f(x))$ 인 x 의 값은 2뿐이다.

2. $a_1=2$ 라고 하자. $a_n=2$ 이면, $a_{n+1}=f(a_n)=f(2)=2$ 이므로, 수학적 귀납법에 의해

$a_n=2\ (n=1,2,3,\cdots)$, 즉 수열 $\{a_n\}$ 은 2로 수렴한다.

이제 $a_1\neq 2$ 라고 하자. 먼저 임의의 $x, y\ (x<y)$ 에 대해 위에서 보았듯이, $f(y)-f(x)\geq 2(y-x)$ 이므로, 임의의 $x, y(x\neq y)$ 에 대해 $|f(y)-f(x)|\geq 2|y-x|$ 가 성립한다. 이제 $|a_n-2|\geq 2^{n-1}|a_1-2|$ 임을 증명하자: $n=1$ 일 때 $|a_1-2|=2^{1-1}|a_1-2|$ 로 성립. $|a_n-2|\geq 2^{n-1}|a_1-2|$ 가 성립한다고 하자. 그러면, $|a_{n+1}-2|=|f(a_n)-f(2)|\geq 2|a_n-2|\geq 2\times 2^{n-1}|a_1-2|=2^n|a_1-2|$.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}|a_n-2|=\infty$. 그러므로, $\lim_{n\to\infty}a_n$ 은 발산한다.

3. 함수 $h:R\to R$ 를 $h(x)=f(x)-x+2=x^3+x-8$ 라고 정의하자. 방정식 $h(x)=x$ 는 유일한 실수해 2를 갖는다.

$\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대해 $b_{n+1}=h(b_n)$ 을 만족한다.

$b_1=2$ 이면, 위 문항 2에서와 같이 $\{b_n\}$ 은 수열 $2, 2, \cdots, 2, \cdots$ 이므로 2로 수렴한다.

$b_1>2$ 이라고 하자. 먼저 $b_n>2\ (n=1,2,3,\cdots)$ 임을 수학적 귀납법으로 보이자: $b_n>2$ 라고 가정하자. 그러면, $b_{n+1}-2=h(b_n)-h(2)=h'(c)(b_n-2)\ (2<c<b_n)$ 가 성립한다. $h'(x)=3x^2+1$ 이므로 $h'(c)>h'(2)=13$ 이고, $b_n-2>0$ 이므로 $b_{n+1}-2=h'(c)(b_n-2)>13(b_n-2)>0$ 이다. 그러면 문항 2에서와 같이 $b_n-2>13^{n-1}(b_1-2)$ 가 모든 자연수 n 에 대해 성립한다. 그러므로 b_n-2 는 ∞ 로 발산한다.

$b_1<2$ 라고 하자. 그러면, $x<2$ 일 때 $h(x)<x$ 이므로, $b_2=h(b_1)<b_1$ 이 성립한다. 이제 부등식 $b_{n+2}-b_{n+1}\leq b_{n+1}-b_n<0$ 이 모든 자연수 n 에 대해 성립함을 보이자: 먼저 $h'(c)\geq 1$ 이고 $b_2-b_1<0$ 이므로 $b_3-b_2=h(b_2)-h(b_1)=h'(c)(b_2-b_1)\leq b_2-b_1$.,즉, $b_3-b_2\leq b_2-b_1<0$ 이 성립한다.

이제 $b_{n+2}-b_{n+1}\leq b_{n+1}-b_n<0$ 이 성립한다고 하자. 그러면,

$$b_{n+3}-b_{n+2}=h(b_{n+2})-h(b_{n+1})=h'(c)(b_{n+2}-b_{n+1})\leq b_{n+2}-b_{n+1}<0.$$

이것은 특히 $b_{n+1}-b_n\leq b_2-b_1<0$ 이 모든 자연수 n 에 대해 성립한다는 것을 의미한다.그러므로 $b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\leq(b_2-b_1)+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=(n-1)(b_2-b_1)+b_1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$.