	한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 제시문(가)에 있는 그림의 타원을 점 O가 원점에, 점 F, F′이 x축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면

타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 이고, $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{B'}(0,-2)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{5},0)$ 이다.

점 B와 초점 F′을 잇는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x+2$ 이다. 이로부터 $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{9\sqrt{5}}{7},\ -\dfrac{4}{7}\right)$를 구하고,

따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{\left(0-\left(-\dfrac{9\sqrt{5}}{7}\right)\right)^2+\left(2-\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)^2}=\dfrac{27}{7}$ 이다.

$\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{27}{7}<4=\overline{\mathrm{BB'}}$ 이므로, 이 타원의 경우 수연이의 추측은 참이 아니다.

2. 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ 이라 하면,

$\mathrm{B}(0,b)$, $\mathrm{B'}(0,-b)$, $\mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ 이다. 문제 1번과 같은 방법으로

$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2a^2\sqrt{a^2-b^2}}{2a^2-b^2},\ -\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}\right)$를 구하고, 따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{2a^3}{2a^2-b^2}$ 를 얻는다.

이 때, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BB'}}$ 이면 $\dfrac{2a^3}{2a^2-b^2}=2b$ 이고, $\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{BB'}}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

3. 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ 이라 하고, 이 타원 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,y)$

라 하면

$$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2+y^2-2by+b^2}=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}\left(y-\frac{b^3}{b^2-a^2}\right)^2+\frac{a^4}{a^2-b^2}}$$

이고, 이 때 $-b\le y\le b$ 이다.

(1) $\dfrac{b^3}{b^2-a^2}\le -b$ $\left(\dfrac{a}{b}\le\sqrt{2}\right)$ 이면, P의 y좌표가 $-b$인 경우에만, $\overline{\mathrm{BP}}$는 최댓값 $2b$를 갖는다.

한편 문제 2번에서 구한 Q의 y좌표는 $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}$ 이고, $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}\neq -b$ 이므로, 이 경우 수연이의 추측은 참이 아니다.

(2) $\dfrac{b^3}{b^2-a^2}>-b$ $\left(\dfrac{a}{b}>\sqrt{2}\right)$ 이면, P의 y좌표가 $\dfrac{b^3}{b^2-a^2}$ 인 경우에만, $\overline{\mathrm{BP}}$는 최댓값 $\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2-b^2}}$ 를 갖는다. 한편 문제 2번에서 구한 Q의 y좌표는 $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}$ 이고 $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}\neq\dfrac{b^3}{b^2-a^2}$ 이므로, 이 경우 역시 수연이의 추측은 참이 아니다.

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

(1) $x=\frac{\pi}{2}-t$ 로 치환하면, $dx=-dt$ 이다. 이를 이용하면 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)dx$의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\frac{\pi}{2}-t)f(\cos(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-t)f(\sin t)dt\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt\end{aligned}$$

위의 식으로부터 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$이다.

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ 라고 하자.

정적분 I에서 $x=\frac{\pi}{4}-t$ 로 치환하면, $dx=-dt$ 이다.

탄젠트 덧셈공식을 사용하여, $\tan x=\tan(\frac{\pi}{4}-t)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan t}=\dfrac{1-\tan t}{1+\tan t}$을 얻는다.

그러면 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})(-dt)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan t)]dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

이다. 따라서 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$ 이다.

(3) $f(x)=\cos x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(t)-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt$ 에서 $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(t)-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt$ 라고 하자.

그러면 $f(x)=\cos x-A$ 이므로,

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(t)-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos t-A-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt-(A+\frac{\pi}{4})\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2t+1}{2}dt-(A+\frac{\pi}{4})\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt\\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-(A+\frac{\pi}{4})[\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})-(A+\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $A=\frac{2-\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{8}(3\sqrt{2}-4)$이므로, $f(x)=\cos x-\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{8}(3\sqrt{2}-4)$이다.