한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1번

1. $f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}-\dfrac{1}{2-\cos x}$

함수 $f(x)$ 에서

$\sin(x)=\sin(x+2\pi)$, $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$ 로 부터 $f(x)=f(x+2\pi)$ 임을 알 수 있다.

$\theta=$ 2π 가 최소임을 보이자.

우선 $f(x)=0$ 인 되는 x 를 구하여 보면 (그래프개형에서 x축과 만나는 점을 모두 구해보면)

$f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}-\dfrac{1}{2-\cos x}=$ $\dfrac{\sin x-\cos x}{(2-\sin x)(2-\cos x)}=0$ 에서

분모는 항상 0 보다 크므로 분자 $\sin x-\cos x=0$ 인 해를 구하자.

$\sin x=\cos x$ 을 만족하는 x 는 $\dfrac{\pi}{4}\pm n\pi$, $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$

$f(x)=0$ 인 되는 x 는 $\cdots,-\dfrac{11\pi}{4}$ $-\dfrac{7\pi}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{9\pi}{4}$, $\cdots$

가능성 있는 주기는 π 와 2π 이다.

모든 x 에 대해서 $f(x)=f(x+2\pi)$ 이 만족됨을 보였으므로

주기가 π 가 아님을 보이면 된다.

주기 θ 가 $\theta=$ π 이라면

$\theta=$ π 인 경우는 $f(x+\pi)=\dfrac{1}{2+\sin x}-\dfrac{1}{2+\cos x}$

모든 x 에 대해서

$f(x)=$ $\dfrac{\sin x-\cos x}{(2-\sin x)(2-\cos x)}$ $=$ $\dfrac{-\sin x+\cos x}{(2+\sin x)(2+\cos x)}$ $=$ $f(x+\pi)$ 를 만족해야 한다.

$\dfrac{\sin x-\cos x}{(2-\sin x)(2-\cos x)}$ $=$ $\dfrac{-\sin x+\cos x}{(2+\sin x)(2+\cos x)}$ 를 정리하면

$\dfrac{(\sin x-\cos x)\{(2-\sin x)(2-\cos x)+(2+\sin x)(2+\cos x)\}}{(2-\sin x)(2-\cos x)(2+\sin x)(2+\cos x)}$ $=0$ 는 모든 x 에 대해서 만족하지 않는다.

이유는 분모는 항상 0 보다 크고

분자가 $(\sin x-\cos x)\{(2-\sin x)(2-\cos x)+(2+\sin x)(2+\cos x)\}$ 에서

모든 x 에 대해서 $(2-\sin x)(2-\cos x)+(2+\sin x)(2+\cos x)$ >0 이므로

모든 x 에 대해서 $f(x)=f(x+\pi)$ 이 만족되지 않는다.

따라서 주기가 π 일 수 없다.

[별해]

도함수 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{(2-\sin x)^2}+\dfrac{\sin x}{(2-\cos x)^2}$ 이므로 $-\dfrac{7\pi}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ 에서

$f(x)$의 기울기를 고려하면

$$f'(\pi/4) = \frac{\cos(\pi/4)}{(2-\sin(\pi/4))^2}+\frac{\sin(\pi/4)}{(2-\cos(\pi/4))^2}$$

$$= \frac{\cos(-7\pi/4)}{(2-\sin(-7\pi/4))^2}+\frac{\sin(-7\pi/4)}{(2-\cos(-7\pi/4))^2} = f'(-7\pi/4) > 0$$ 이고

$$f'(5\pi/4) = \frac{\cos(5\pi/4)}{(2-\sin(5\pi/4))^2}+\frac{\sin(5\pi/4)}{(2-\cos(5\pi/4))^2}$$

$$= \frac{\cos(-3\pi/4)}{(2-\sin(-3\pi/4))^2}+\frac{\sin(-3\pi/4)}{(2-\cos(-3\pi/4))^2} = f'(-3\pi/4) < 0$$ 이므로

정리하면, 그래프가 x축과 만나는 점에서의 기울기가 같아지게 되는

$f(x)=f(x+\theta)=0$ 이고 $f'(x)=f'(x+\theta)$ 를 만족하는 최소의 θ는

2π보다 작은 값에서는 존재하지 않는다라는 것을 알 수 있다.

2π보다 작은 값에서 모든 실수x에 대해 $f(x)=f(x+\theta)$를 만족시키는 θ가 존재하지 않음을 알 수 있다.

최소주기는 2π 이다.

2. 방정식 $f(x)=g(x)$을 만족하는 해 x를 모두 구하시오.

$$f(x)=\frac{1}{2-\sin x}-\frac{1}{2-\cos x}=\frac{2}{4-\sin^2 x}-\frac{2}{4-\cos^2 x}=g(x)$$

$$\frac{(2+\sin x)(4-\cos^2 x)-(4-\sin^2 x)(2+\cos x)-2(4-\cos^2 x)+2(4-\sin^2 x)}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)}=0$$

분모는 0 이 아니므로

$(2+\sin x)(4-\cos^2 x)-(4-\sin^2 x)(2+\cos x)-2(4-\cos^2 x)+2(4-\sin^2 x)=0$

을 만족하는 x 를 구하면 된다.

분자 : $4\sin x-\sin x\cos^2 x-3\cos x-\cos^3 x=0$

=> $(\sin x-\cos x)(4+\sin x\cos x)=0$

$\sin x-\cos x=0$ 를 만족하는 x 는 $\pm n\cdot\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $n=0,1,2,\cdots$

3. 함수$g(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

$g'(x)=4\sin x\cos x\left(\dfrac{1}{(4-\sin^2 x)^2}+\dfrac{1}{(4-\cos^2 x)^2}\right)=0$ 의 해를 구하면

$\left(\dfrac{1}{(4-\sin^2 x)^2}+\dfrac{1}{(4-\cos^2 x)^2}\right)>0$ 이므로 $\sin x\cos x=0$을 만족하는 x 들이 극점이 된다.

$\sin x\cos x=0$을 만족하는 x 는 $\pm n\dfrac{\pi}{2}$, $n=0,1,2,\cdots$

최댓값은 n이 홀수 일 때, $g(x)=\dfrac{1}{6}$

최솟값은 n이 0과 짝수 일 때, $g(x)=-\dfrac{1}{6}$

4. 부등식 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx \; < \; \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx$ 이 만족됨을 설명하시오.

문제 1-2에서

$f(x)-g(x)= \dfrac{(\sin x-\cos x)(4+\sin x\cos x)}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)}$ 이므로

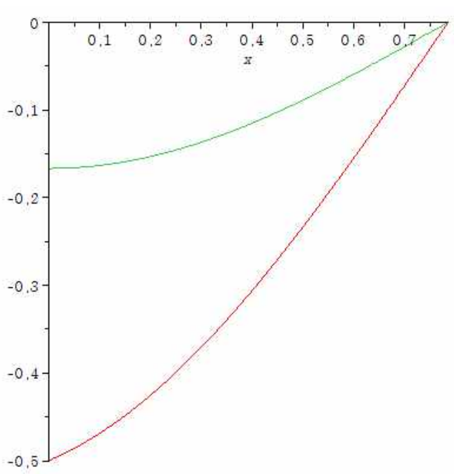
분모는 항상 0보다 크고

분자 $(\sin x-\cos x)(4+\sin x\cos x)$는 구간 $[0,\frac{\pi}{4})$ 에서 0보다 작고 $x=\frac{\pi}{4}$에서 0 이다.

따라서 구간 $[0,\frac{\pi}{4})$ 에서 $f(x)-g(x)<0$ 이므로, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x)-g(x)\}\,dx<0$ 이고

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx \; < \; \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx$ 이 성립한다.

혹은 그림으로 설명



한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. 우선 $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=\frac{1}{2017}f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$이다. 한편, $f(0)=\frac{1}{2017}f(0)^2$이므로 $f(0)=0$ 또는 2017이다. 만약 $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f(x+0)=\frac{f(x)f(0)}{2017}=0\text{이다.}$$

즉, 함수 $f(x)=0$ (상수함수)으로 연속함수이다. 만약 $f(0)=2017$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이라면, 즉 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=2017$ 이라면,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to 0}f(a+x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(a)f(x)}{2017}=f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$는 임의의 실수 $x=a$에서 연속이다.

2. 1번에서 볼 수 있듯이 만약 $f(0)=0$이면, 함수 $f(x)=0$ (상수함수)으로 미분가능함수이다. 만약 $f(0)\neq 0$이면

$f(0)=2017$이고, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하므로

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2017}{h}$$

가 존재한다. 또한 임의의 실수 a에 대하여

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)f(h)/2017-f(a)}{h}\\&=\frac{f(a)}{2017}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2017}{h}\\&=\frac{f(a)}{2017}f'(0)\end{aligned}$$

역시 존재한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분 가능하다.

3. $f^{-1}(a)=c, f^{-1}(b)=d$ 라 하면 $f^{-1}(a)+f^{-1}(b)=c+d$ 이다. 한편 $f(c)=a, f(d)=b$ 이므로

$$\frac{ab}{2017}=\frac{f(c)f(d)}{2017}=f(c+d)$$

이다. 따라서

$$f^{-1}(\frac{ab}{2017})=c+d=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$$

이다.

4. 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 $g(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하면, 역함수 미분법에 의해 함수 $g(x)$는 $f(0)=2017$에서 미분가능하고

$$g'(2017)=\frac{1}{f'(0)}$$

이다. 한편

$$g'(2017)=\lim_{h\to 0}\frac{g(2017+h)-g(2017)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(2017+h)}{h} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(a)+g(2017+2017h/a)-g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(2017+2017h/a)}{h} \\ &= \frac{2017}{a}\lim_{h\to 0}\frac{g(2017+2017h/a)}{2017h/a} \\ &= \frac{2017}{a}g'(2017) \end{aligned}$$

역시 존재한다. 따라서 함수 $g(x)=f^{-1}(x)$는 $x=a$에서 미분 가능하다.

별해> 역함수 미분법과 2번의 결과에 의해서 $f(c)=a$인 c에 대하여

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{f'(c)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(c)}{2017}f'(0)} \\ &= \frac{2017}{af'(0)} \end{aligned}$$

따라서 함수 $g(x)=f^{-1}(x)$는 양의실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분 가능하다.