한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-1번

1. (가)에서 $x=y=8$라면 $g(0)=g(8-8)=g(8)^2+f(8)^2=1$.

   한편 $x=y=0$이면 $1=g(0)=g(0)^2+f(0)^2=1+f(0)^2$이므로 $f(0)=0$이다.

2. 먼저 $g(8-x)=g(8)g(x)+f(8)f(x)=f(x)$이고

   $f(8-x)=g(8-(8-x))=g(x)$이므로

$$\begin{aligned} f(x+y)=g(8-(x+y))&=g((8-x)-y) \\ &=g(8-x)g(y)+f(8-x)f(y) \\ &=f(x)g(y)+g(x)f(y). \end{aligned}$$

3. 먼저 $\dfrac{\pi}{16}=f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$ 이고

   $0=g'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)-1}{h}$ 이므로 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned} g'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(x)g(-h)+f(x)f(-h)-g(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{g(x)(g(-h)-1)+f(x)f(-h)}{h}=-g'(0)g(x)-f'(0)f(x)=-\frac{\pi}{16}f(x) \end{aligned}$$

   이다. 즉 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 미분가능함수이다.

   한편 $g(x)=t$라 치환하면 $\dfrac{d}{dt}g(x)=g'(x)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\pi}{16}f(x)\dfrac{dx}{dt}=1$이고 $g(0)=1, g(8)=0$이므로

$$\int_0^8 f(x)g(x)^2e^{g(x)+1}dx=\frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2e^{t+1}dt=\frac{16}{\pi}[(t^2-2t+2)e^{t+1}]_0^1=\frac{16}{\pi}(e^2-2e).$$

   위의 식에서 두 번째 등호는 다음 부정적분으로 알 수 있다.

$$\int t^2e^{t+1}dt=t^2e^{t+1}-2\int te^{t+1}dt=t^2e^{t+1}-2(te^{t+1}-\int e^{t+1}dt)=(t^2-2t+2)e^{t+1}.$$

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 양의 실수 t에 대하여 $f(t)=(1+t)-\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이라 하자. 양변을 t에 대하여 미분하면,

$f'(t)=1-(-t+1-\dfrac{t^2}{2})e^t > 1-(1-t)e^t = g(t)$를 얻는다.

임의의 양의 실수 t에 대하여 $g'(t)=e^t-(1-t)e^t = te^t > 0$,

$\Rightarrow$ $g(t)$는 증가함수이고, $g(0)=1-(1-0)e^0 = 0$이다.

$\Rightarrow$ 임의의 양의 실수 t에 대하여 $g(t)>g(0)=0$

$\Rightarrow$ $f'(t)>g(t)=1-(1-t)e^t > g(0)=0$

$\Rightarrow$ $f(t)$는 증가함수이고, $f(0)=1-(1-0)e^0 = 0$ 이다.

$\Rightarrow$ 임의의 양의 실수 t에 대하여 $f(t)>0$

그러므로 모든 양의 실수 t에 대하여 $1+t > \left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이므로, 부등식을 만족하는 t의 범위는 $(0,\infty)$이다.

그러므로 모든 양의 실수 t에 대하여 $1+t > \left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이므로, 부등식을 만족하는 t의 범위는 $(0,\infty)$이다.

[별해1] $f'(t)=1-(-t+1-\dfrac{t^2}{2})e^t$이고, $f''(t)=(\dfrac{t^2}{2}+2t)e^t>0$이다.

양의 실수범위에서 $f'(t)$는 증가함수이므로, 양의 실수 t에 대하여 $f'(t)>f'(0)=0$이 성립한다.

따라서 양의 실수범위에서 $f(t)$도 역시 증가함수이고, 양의 실수 t에 대하여 $f(t)>f(0)=0$이 성립한다.

$1+t > \left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이 성립한다.

[별해2] $f(t)=\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$, $g(t)=1+t$라 하자.

$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(t^2+2t-2)e^t$이고, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{3}$ 이다.

$f''(t)=-\dfrac{1}{2}(t^2+4t)e^t$ 이고, $f''(t)=0 \Leftrightarrow t=0,-4$이다. (변곡점은 $t=0,4$에서 나타난다.)

$t=0$일 때, $(0,1)$에서의 접선의 방정식은 $y=1+f'(0)t=1+t$이므로,

양의 실수 t에 대하여 $g(t)>f(t)$이 성립한다.

2. 다항식 $p_{2n-1}(x)$에 $x=0$을 대입하면, $p_{2n-1}(0)=1>0$ --------------- ㉠

다항식 $p_{2n-1}(x)$에 $x=-2n$을 대입하여 $p_{2n-1}(-2n)$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_{2n-1}(-2n)=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-2n)^k}{k!} = [1+(-2n)]+\left[\frac{(-2n)^2}{2!}+\frac{(-2n)^3}{3!}\right] + \cdots + \left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]+\cdots+\left[\frac{(-2n)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{(-2n)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]$$

임의의 $1\le k\le n$에 대하여,

$$\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}=\frac{(-2n)^{2k-2}(2k-1-2n)}{(2k-1)!}=\frac{(-2n)^{2k-2}(2k-2n-1)}{(2k-1)!} < 0$$

$$\Rightarrow \quad p_{2n-1}(-2n) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!} + \frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] < 0 \quad \text{------------ ㉡}$$

$\therefore$ 식 ㉠과 ㉡에 의해, $p_{2n-1}(0) > p_{2n-1}(-2n)$이다.

3. $x \geq 0$인 경우와 $x < 0$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $x \geq 0$인 경우는 $p_{2n}(x) \geq 1 > 0$ 이므로, $p_{2n}(x) = 0$을 만족하는 $x \geq 0$인 실수는 없다.

(ii) $x < 0$인 경우; 모든 자연수 n에 대하여 $p_{2n}(x) > 0$ 임을 보이면 모든 음의 실수 x에서는 $p_{2n}(x) \neq 0$이다.

따라서 (i)과 (ii)에 의해, $p_{2n}(x) = 0$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

(ii)의 경우를 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n = 1$인 경우; $p_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} = (1 + \dfrac{x}{2})^2 + \dfrac{x^2}{4} > 0$이다.

$n = k-1$인 경우; $p_{2k-2}(x) > 0$이 성립함을 가정하자.

등식 $p_{2k}'(x) = p_{2k-1}(x)$이 성립하고, 문제 (2)번에서 $p_{2k-1}(0) > 0$과 $p_{2k-1}(-2k) < 0$임을 알 수 있다.

$p_{2k-1}(x)$는 연속함수이므로, 중간값 정리에 의해 $p_{2k-1}(t) = 0$인 t가 $-2k$ 과 0 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$0 = p_{2k-1}(t) = \sum_{m=0}^{2k-1}\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{2k-2}\frac{t^m}{m!} + \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \text{--------------- } (*)$$

귀납법 가정에 의해, $0 < p_{2k-2}(x) = p_{2k-1}{}'(x)$이므로 $p_{2k-1}(x)$는 증가함수이다.

따라서 $p_{2k-1}(t) = 0$인 t가 $-2k$ 와 0 사이에 하나만 존재한다. 실수 $t < 0$ 이므로,

$$p_{2k}{}''(t) = p_{2k-1}{}'(t) = p_{2k-2}(t) = \sum_{m=0}^{2k-2}\frac{t^m}{m!} = -\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} > 0 \qquad \text{-------- ㉢}$$

위의 식 ㉢에서 4번째 등식은 식 $(*)$에 의해서 성립한다.

그러므로 다항식 $p_{2k}(x)$는 $x = t$에서 극솟값(최솟값)을 갖고, $t \neq 0$ 이므로,

$$p_{2k}(x) \geq p_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{2k}\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{2k-1}\frac{t^m}{m!} + \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{t^{2k}}{(2k)!} > 0$$

위의 등식에서 3번째 등식은 식 $(*)$에 의해서 성립한다. 그러므로 $p_{2n}(x)$는 실근을 갖지 않는다.