한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

1. $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt=\int_a^{\ln(x+1)+a} s\ ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_a^{\ln(x+1)+a}=\frac{1}{2}(\ln(x+1)+a)^2-\frac{1}{2}a^2 \ge -\frac{1}{2}a^2$

이고, $x=e^{-a}-1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}a^2$을 갖는다. 따라서 $a=1$이고, $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2+\ln(x+1)$이다.

$f(x)$를 미분하면, $f'(x)=\ln(x+1)\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$이다.

정적분 $\int_0^{e^2-1}\frac{[\ln(x+1)+1][f(x)]^3}{x+1}dx$을 구하기 위하여, $f(x)=t$로 치환하여 적분하면,

$$\int_0^{e^2-1}\frac{[\ln(x+1)+1][f(x)]^3}{x+1}dx=\int_0^4 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^4=4^3=64$$이다.

2. $f(x)$와 x축과의 교점을 구하면,

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)=0 \Rightarrow \ln(x+1)=0 \text{ or } -2 \Rightarrow x=0 \text{ or } x=e^{-2}-1$$

따라서 구하고자하는 정적분은 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\int_{e^{-3}-1}^0 |f(x)|dx=\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx-\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)dx \quad \text{--------------} \ ①$$

우선 $f(x)$의 부정적분을 구하면,

$$\int f(x)dx=\int\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)\right]dx=\frac{1}{2}\int(\ln(x+1))^2dx+\int\ln(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+1)(\ln(x+1))^2-\int(x+1)2\ln(x+1)\frac{1}{x+1}dx\right]+\int\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)(\ln(x+1))^2.$$

등식 ①의 오른쪽 첫 번째 적분을 구하면,

$$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx=\frac{1}{2}(x+1)\left[(\ln(x+1))^2\right]_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}=\frac{1}{2}e^{-2}(-2)^2-\frac{1}{2}e^{-3}(-3)^2=2e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}.$$

등식 ①의 오른쪽 두 번째 적분을 구하면,

$$\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}(x+1)[\ln(x+1)]^2\right]_{e^{-2}-1}^0=0-\frac{1}{2}e^{-2}\times(-2)^2=-2e^{-2}.$$

그러므로 구하는 정적분은 $\int_{e^{-3}-1}^0|f(x)|dx=4e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}$ 이다.

3. $f'(x)=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$이고, 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)=\frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}<0$ 이다.

그러므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 평균값 정리에 의해 아래의 ①과 ②가 성립한다.

① $\frac{1}{x}$과 $\frac{2}{x}$ 사이에 c_1이 존재하여 $f'(c_1)=\dfrac{f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}=x\left[f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})\right]$을 만족한다.

② $\frac{2}{x}$와 $\frac{3}{x}$사이에 c_2가 존재하여 $f'(c_2)=\dfrac{f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}=x\left[f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})\right]$을 만족한다.

$x>0$에서 함수 $f'(x)$는 감소함수이고 $c_1<c_2$이므로, $f'(c_1)>f'(c_2)$이다.

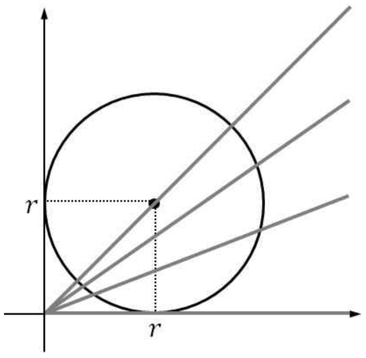
따라서 $x\left[f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})\right]>x\left[f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})\right]$이고 $x>0$이므로, $f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})>f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})$이다.

그러므로 양의 실수 x에 대하여 부등식 $2f(\frac{2}{x})>f(\frac{1}{x})+f(\frac{3}{x})$이 성립한다.

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오전-2번

1.



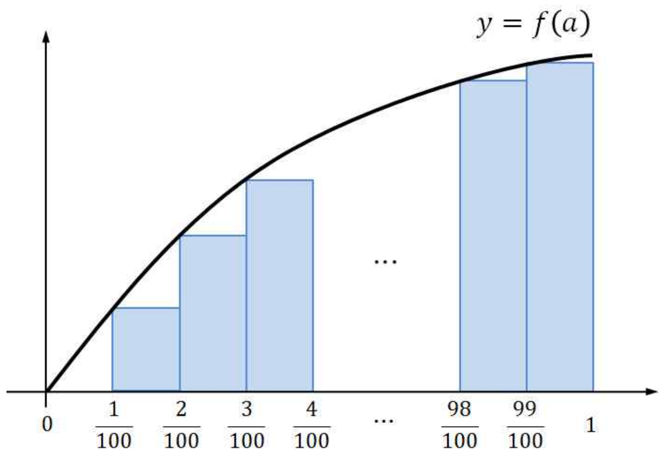
주어진 원의 방정식: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

$y=ax$와의 교점의 방정식 : $(x-r)^2+(ax-r)^2=r^2$, 즉 $(a^2+1)x^2-2r(a+1)x+r^2=0$

$$f(a)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+(ax_1-ax_2)^2=(a^2+1)(x_1-x_2)^2=4r^2\frac{2a}{(a^2+1)}$$

$$\int_0^1 f(a)\,da=\int_0^1 4r^2\frac{2a}{a^2+1}\,da=\left[4r^2\ln(a^2+1)\right]_0^1=4r^2\ln 2$$

2.



$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f(\frac{100-k}{100})=\sum_{k=0}^{99} f(\frac{k}{100})\frac{1}{100}$ 는 위 그림과 같이, 높이가 $f(\frac{k}{100})$, 밑변의 길이가 $\frac{1}{100}$인 사각형의 넓이들의 합이고,

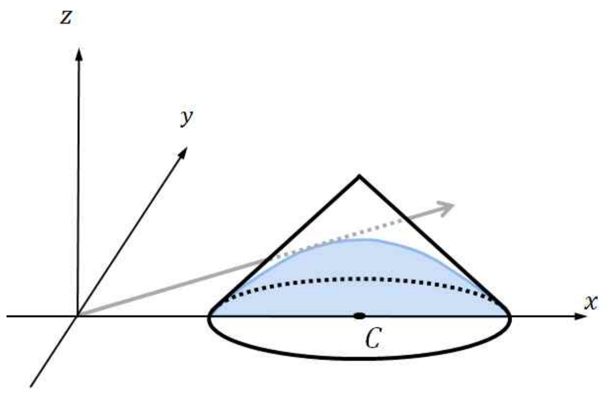
$\int_0^1 f(a)\,da$ 는 x축, $x=1$ 그리고 $y=f(a)$로 둘러싸인 영역의 넓이다.

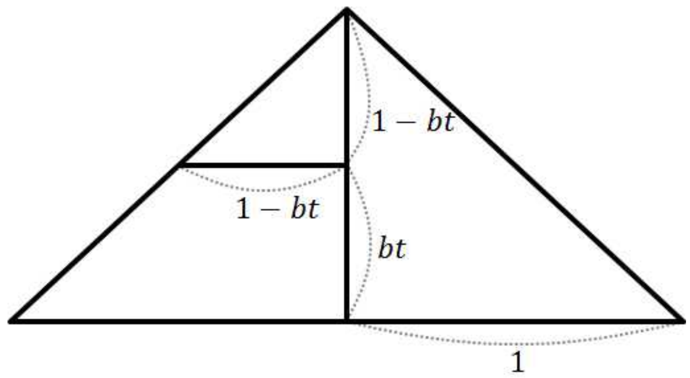
f는 $[0,1]$에서 증가함수이다. 따라서 $\int_0^1 f(a)\,da>\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f(\frac{100-k}{100})$가 성립한다.

($\because$ $f'(a)=8r^2\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}>0$ $(0<a<1)$ 또는

위 1의 그림과 같이 a값이 증가함에 따라 원과 직선과의 교선의 길이가 증가함을 그림을 통해 알 수 있다)

3.





주어진 직선 위의 점의 좌표는 $t(1,b,b)$로 나타내어지는데,
원뿔은 x좌표가 양인 부분에 있으므로 $t>0$ 이다.

직선이 원뿔의 표면과 만나는 점을 $t(1,b,b)$라 하고,
이 교점과 원뿔의 꼭지점 그리고 밑면의 중심점을 포함하는 평면을 생각하면,
그림의 삼각형으로부터 세 점의 위치관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.
즉, 교점(t,bt,bt)으로부터 점$(c,0,bt)$까지의 거리의 제곱은,
$(t-c)^2+(bt-0)^2=(1-bt)^2$, 이를 t에 대한 2차식으로 정리하면 $t^2+2(b-c)t+c^2-1=0$.

t에 대한 위의 방정식이 근을 가질 조건을 판별식으로 구하면,
$(b-c)^2-(c^2-1)\ge 0$, 즉 $b\ge c+\sqrt{c^2-1}$ 또는 $b\le c-\sqrt{c^2-1}$.

이 중 직선이 실제로 원뿔을 만나는 경우는 $b\le c-\sqrt{c^2-1}$.
이 경우 해는 $t=-(b-c)\pm\sqrt{(b-c)^2-(c^2-1)}$, 즉 $t=-(b-c)\pm\sqrt{b^2-2bc+1}$ 이므로,
선분 길이의 제곱값은

$$
\begin{aligned}
(g(b))^2 &= (t_2-t_1)^2+(bt_2-bt_1)^2+(bt_2-bt_1)^2\\
&=(2b^2+1)(t_2-t_1)^2\\
&=(2b^2+1)\cdot 4\cdot(b^2-2bc+1)\\
&=4(2b^2+1)(b^2-2bc+1)
\end{aligned}
$$

따라서 문제에 대한 답은,

$0\le b<c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때, $g(b)=2\sqrt{(2b^2+1)(b^2-2cb+1)}$

$b\ge c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때, $g(b)=0$