(1) 조건 (나) $f(m)f(n) = f(m+n)+f(m-n)$로부터

$f(x)=p^x+q^x$ 에서 $f(0)=p^0+q^0=2$ 이므로 $f(0)=2$.

자연수 $m=1, n=1$ 이면 $f(1)f(1) = f(2)+f(0)$ 이므로 $f(2)=7$.

자연수 $m=2, n=1$ 이면 $f(2)f(1) = f(3)+f(1)$ 이므로 $f(3)=18$.

[별해] 자연수 $n=1$ 이면 $f(m)f(1)= f(m+1)+f(m-1)$ 이므로,

점화식 $f(m)=3f(m-1)-f(m-2)$ 을 이용하면

$f(0)=2$, $f(1)=3$ 이므로 $f(2)=7$ 이고 $f(3)=18$.

(2) 점화식 $f(m)=3f(m-1)-f(m-2)$ 을 이용하면

모든 자연수 m에 대해서 $p^{m+2}+q^{m+2} = 3(p^{m+1}+q^{m+1})$ - (p^m+q^m)이다.

따라서 모든 자연수 m에 대해서 $p^m(p^2-3p+1)+q^m(q^2-3q+1)=0$ 만족되어야 한다.

$p=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$이면 $p^2-3p+1=0$ 이다.

조건으로 부터 $p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $q=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 이다.

[별해] $f(1)=p+q = 3$, $f(2)=p^2+q^2 = 7$ 로부터 $9=(p+q)^2= p^2+q^2+2pq = 7+2pq$ 이다.

따라서 $pq=1$.

$q=3-p$ 를 $pq=1$ 에 대입하면 $p^2-3p+1=0$. 따라서 $p=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$이다.

$p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ 이면 $q=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

$p=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 이면 $q=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$

(3) $f(x)=p^x+q^x$이므로

$f(x)$ 는 미분가능한 함수이며 도함수는 $f'(x)=p^x\ln p+q^x\ln q$

$f'(0)=\ln p+\ln q=\ln pq=0$; 문제 (2)에서 $p*q=(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}))*(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}))=1$. $f'(0)<1$ 이다.

$f'(1)=p\ln p+q\ln q>1$; $\ln p+\ln q=0$이므로 $\ln q=-\ln p$ 이고 $p-q=\sqrt{5}>2$이므로

$f'(1)=p\ln p+q\ln q=(p-q)\ln p=\sqrt{5}\,ln\,p$.

또한, $p^2=\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})>3>e$ 이므로 $f'(1)=\sqrt{5}\,ln\,p>2\ln p>\ln p^2>1$

따라서 $f'(1)=\sqrt{5}\,ln\,p>1$.

$f'(x)$는 구간 $[0,1]$에서 연속함수 이며, $f'(0) < 1 < f'(1)$이므로, 중간값 정리에 의해서 $f'(a) = 1$ 이 되는 a는 구간 $[0,1]$에서 적어도 한 개가 존재한다.

어떤 값 $0 \le b \le 1$에 대해 $f'(b) = 1$ 이라 하자. $f''(x) = p^x (\ln p)^2 + q^x (\ln q)^2$ 이고 0 이 아닌 모든 실수 x 에 대해서$f''(x) > 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 음이 아닌 실수 x에 대해서 연속하는 증가함수이다. 따라서 $0 \le x < b$에 대해 $f'(x) < f'(b)$이며 $b < x \le 1$에 대해 $f'(b) < f'(x)$이다. 즉, $f'(a) = 1$이 되는 a는 구간 $[0,1]$에 단 한 개만 존재한다.

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. $r<0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \le 1$인 경우

$a_{m,1} = \int_0^{(-r)^{\frac{1}{m}}} (1+\frac{y^m}{r})dy = (-r)^{\frac{1}{m}} + \frac{(-r)^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)} = (-r)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+1}$ 이고 $b_{m,1} = 1-(-r)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+1}$ 이다.

극한 $\lim_{m\to\infty} \frac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = 0$ 이다.

$r<0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \ge 1$인 경우

$a_{m,1} = \int_0^1 (1+\frac{y^m}{r})dy = 1+\frac{1}{r(m+1)}$ 이고 $b_{m,1} = -\frac{1}{r(m+1)}$ 이다.

극한 $\lim_{m\to\infty} \frac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = 0$ 이다.

2. $r>0,\ (r(n-1))^{\frac{1}{m}} \ge n$인 경우

$a_{m,n} = \int_0^n (1+\frac{y^m}{r})dy = n+\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$ 이고 $b_{m,n} = n^2-n-\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$ 이다.

$r>0,\ (r(n-1))^{\frac{1}{m}} \le n$인 경우

$a_{m,n} = \int_0^{(r(n-1))^{\frac{1}{m}}} (1+\frac{y^m}{r})dy + n(n-(r(n-1))^{\frac{1}{m}}) = (r(n-1))^{\frac{1}{m}} + \frac{(r(n-1))^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)} + n(n-(r(n-1))^{\frac{1}{m}})$ 이고

$b_{m,n} = n^2-(r(n-1))^{\frac{1}{m}} - \frac{(r(n-1))^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)} - n(n-(r(n-1))^{\frac{1}{m}})$ 이다.

m이 큰 수이면 $(r(n-1))^{\frac{1}{m}} \le n$인 경우가 되므로 극한 $\lim_{m\to\infty} \frac{b_{m,n}}{a_{m,n}} = \frac{\lim_{m\to\infty} b_{m,n}}{\lim_{m\to\infty} a_{m,n}} = \frac{n-1}{n^2-n+1}$ 이다.

3. $r<0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \ge n$인 경우

$a_{m,n} = \int_0^n (1+\frac{y^m}{r})dy = n+\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$ 이고 $b_{m,n} = n^2-n-\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$ 이다.

$r>0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \le n$인 경우

$a_{m,n} = \int_0^{(-r)^{\frac{1}{m}}} (1+\frac{y^m}{r})dy = (-r)^{\frac{1}{m}} + \frac{(-r)^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}$ 이고 $b_{m,n} = n^2-(-r)^{\frac{1}{m}} - \frac{(-r)^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}$ 이다.

m이 큰 수이면 $(-r)^{\frac{1}{m}} \le n$인 경우가 되므로 극한 $\lim_{m\to\infty} \frac{b_{m,n}}{a_{m,n}} = \frac{\lim_{m\to\infty} b_{m,n}}{\lim_{m\to\infty} a_{m,n}} = \frac{n^2-1}{1} = n^2-1$ 이다.