한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

상 경 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. $f(1)=0$이므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot(1+\Delta x+|\Delta x|)}{\Delta x}=1$$

따라서 함수 f는 $x=1$에서 미분가능하고, $f'(1)=1$이다.

2. 정의에 의해 $f(a)=0$이고, $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\, g(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}g(a+\Delta x)=g(a)$$

임을 알 수 있다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하며, 미분계수 $f'(a)$는 $g(a)$이다.

3. 함수 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a} & (x\neq a)\\ f'(a) & (x=a)\end{cases}$라 하면, $f(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

또한, 만약 함수 $h(x)$가 $f(x)=(x-a)h(x)$를 만족하면

$$h(x)=\frac{f(x)}{x-a}\ \ (x\neq a)$$

이고, $h(x)$가 $x=a$에서 연속이라면

$$h(a)=\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

임을 알 수 있다. 따라서 조건을 만족하는 함수는 유일함을 알 수 있다.