한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

(1) 점 $Q_0(3,P(3))$에서 그래프의 접선의 방정식은 $y-P(3)=P'(3)(x-3)$이므로 $-5=6(a_1-3)$이고 $a_1=\frac{13}{6}$

점 $Q_n(a_n,P(a_n))$에서 그래프의 접선의 방정식은

$y-P(a_n)=P'(a_n)(x-a_n)$이므로 $-P(a_n)=P'(a_n)(a_{n+1}-a_n)$이고 $a_{n+1}=a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}$이다.

(2) $a_{n+1}=a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}=a_n-\frac{a_n^2-4}{2a_n}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)$이다.

1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>2$임을 수학적 귀납법으로 보이자.

(i) $a_1=\frac{13}{6}>2$가 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $a_k>2$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때, $a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{4}{a_k}\right)>\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_k\cdot\frac{4}{a_k}}=2$가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 $a_n>2$이 성립한다.

2) $a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^2-4}{2a_n}$이고 $a_n>2,\ a_n^2>4$이므로 $a_{n+1}<a_n$이 성립한다.

(3) $P(0)=-4,\ P(3)=5$이므로 중간값의 정리에 의하여 $P(c)=0$인 $c\in(0,3)$가 존재한다.

그런데 $P'(x)=2x$이므로 $x\in(0,3)$에 대하여 $P'(x)>0$이므로,

제시문 (나)에 의하여 $y,z\in[0,3]$ $(y<z)$이면 $P(y)<P(z)$이다. 그러므로 $P(c)=0$인 $c\in(0,3)$는 유일하다.

(2)의 결과와 제시문 다)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$가 존재하며 $2\le a<3$이 성립한다.

제시문 (라)와 연속인 함수의 성질에 의하여,

$a_{n+1}=a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}$에서 극한을 취하면, $a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}\right)=a-\frac{P(a)}{P'(a)}$가 성립한다.

따라서 $P(a)=0$이다.

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

(1) $\ln h(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$이고, 양변을 미분하면, $\frac{h'(x)}{h(x)} = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$이다.

$f(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$라 하고, 이 식의 양변을 미분하면, $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)x} + \frac{1}{(1+x)^2} < 0$이다.

ⓐ $f(x)$는 열린구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이다.

ⓑ 또한 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$이고, $f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$이다.

ⓐ와 ⓑ에 의해, 모든 $x \in (0,\infty)$에 대하여 $f(x) > 0$임을 알 수 있다.
따라서 $h'(x) > 0$이므로, 함수 $h(x)$는 증가함수이다.

(2) $\frac{g(x)}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이므로, 임의의 $s, t \in (0,\infty)$에 대하여

$$\frac{1}{s+t}g(s+t) \le \frac{1}{t}g(t) \;\cdots\cdots\; ㉠$$

이 성립한다. $0 < s \le t$라고 가정하자. 그러면 $\frac{g(s)}{s} \ge \frac{g(t)}{t}$이 성립함을 알 수 있다.

㉠의 양변에 $s+t$를 곱하면,

$$g(s+t) \le \frac{s}{t}g(t) + g(t) = \frac{g(t)/t}{g(s)/s}g(s) + g(t) \le g(s) + g(t)$$

이 성립한다.

(3) 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}$, $(x > 0)$일 때,

① n, m은 2보다 크거나 같은 양의 정수이므로, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} > 0$이다. 따라서 $\lim_{x\to\infty}(x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}) = \infty$이다.

② 양의 정수 $n, m \ge 2$에 대하여 $\frac{1}{n}-1, \frac{1}{m}-1 < 0$ 이므로,

$$0 < x < y \;\Rightarrow\; x^{\frac{1}{n}-1} > y^{\frac{1}{n}-1},\quad x^{\frac{1}{m}-1} > y^{\frac{1}{m}-1}$$

이 성립한다. 임의의 양의 실수 $x < y$에 대하여

$$\frac{f(x)}{x} = x^{\frac{1}{n}-1} + x^{\frac{1}{m}-1} > y^{\frac{1}{n}-1} + y^{\frac{1}{m}-1} = \frac{f(y)}{y}$$

이므로, $\frac{f(x)}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이다. 또한, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}}{x} = 0$이다.

임의의 양의 실수 $s \in (0,\infty)$에 대하여,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}(f(s+t) - f(t)) &= \lim_{t\to\infty}\left[(s+t)^{\frac{1}{n}} - t^{\frac{1}{n}} + (s+t)^{\frac{1}{m}} - t^{\frac{1}{m}}\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{s}{(s+t)^{\frac{n-1}{n}} + (s+t)^{\frac{n-2}{n}}t^{\frac{1}{n}} + \cdots + (s+t)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{n-2}{n}} + t^{\frac{n-1}{n}}}\right] \\
&\quad + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{s}{(s+t)^{\frac{m-1}{m}} + (s+t)^{\frac{m-2}{m}}t^{\frac{1}{m}} + \cdots + (s+t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{m-2}{m}} + t^{\frac{m-1}{m}}}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

이다.